UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Formální a neformální poznatky o logaritmech u žáků SŠ

Formal and informal knowledge of logarithms in secondary school students

Diplomová práce

Autor: **Lukáš Mixa**

Vedoucí práce: **Mgr. Derek Pilous, Ph.D.**

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Derka Pilouse, Ph.D. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

Souhlasím se zveřejněním diplomové práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů. Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

Práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Souhlasím s uložením své diplomové práce v databázi Theses.

V Praze dne 15. července 2016 . . . .

Lukáš Mixa

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce, Mgr. Derkovi Pilousovi, Ph.D., za velkou ochotu a trpělivost, cenné rady a připomínky, které mi pomohly k realizaci této diplomové práce.
Děkuji své rodině a nejbližším za podporu při studiu.

Abstrakt:

Diplomová práce se zaměřuje na použití zjednodušených funkcionálních rovnic při procvičování logaritmů. Cílem práce je na základě experimentu určit, do jaké míry jsou poznatky žáků střední školy o pojmu logaritmus formální či neformální.

První část práce se věnuje vzniku a vývoji pojmu logaritmu a logaritmických tabulek. Získané poznatky jsou porovnány s dnešní výukou logaritmu na základě analýzy středoškolských učebnic. V další části je popsán experiment, který byl v rámci práce realizován. V poslední části je zhodnocení cílů práce a jejich využitelnosti při výuce logaritmů.

Klíčová slova: logaritmus, logaritmické tabulky, analýza učebnic, funkcionální rovnice.

Abstract:

This thesis is focused on the utilization of simplified functional equations in logarithm exercise. The goal of this work is to assess the degree of formalism in the logarithm knowledge of high school students.

The first part attends to the origin and development on the term logarithm and logarithmic tables. These findings are subsequently put into the context of present day logarithm teaching extracted from contemporary high school textbooks. The second part describes an experiment which was conducted for the purpose of this thesis. The final part contains the results of the thesis and the evaluation of their relevance for logarithm tuition.

Keywords: logarithm, logarithm tables, textbook analysis, functional equations.

Obsah

Úvod

Motivací ke zvolení tématu logaritmů pro mě byl odstavec ve středoškolské učebnici matematiky týkající se logaritmu. "Partie o exponenciálních funkcích, logaritmických funkcích a logaritmech směřovala ve středoškolské matematice především k numerickým výpočtům pomocí logaritmických tabulek a logaritmického pravítka. Tyto mechanické výpočetní pomůcky se staly v době počítačů historií. Ale exponenciální a logaritmické funkce tím nic ze svého významu ani pro středoškoláky neztratily − jejich užití ve fyzice, chemii, biologii apod. je velmi mnohostranné." (Odvárko, 1993, s. 123)

Na základě středoškolské výuky jsem si nedovedl představit využití logaritmu k numerickým výpočtům, ani jeho využití v jiných vědních oborech. První představu jsem získal až při psaní své bakalářské práce na historii matematiky sedmnáctého století. Na základě získaných znalostí jsem rozhodl toto téma více zpracovat.

Rešerší dostupné literatury jsem neobjevil žádnou práci, která by se blížila mé představě zpracování tohoto tématu. Nenašel jsem inspiraci ani v tématech jiných, která by byla svým zpracováním podobná.

V první kapitole uvádím podrobnou historii logaritmu. Zde jsem hodně čerpal ze své bakalářské práce. Tyto poznatky jsem dále doplnil o informace o objevu Eulerova čísla. Také je zde uvedena analýza středoškolských učebnic v tématu logaritmů, která je následně porovnána s historickým vývojem logaritmu.

Na základě těchto informací jsem vyslovil cíle diplomové práce a realizoval výzkum. Porovnávám dva přístupy k tématu logaritmů. Jeden je vytvořen na základě funkcionální rovnice, která byla historicky hlavní motivací pro vznik konceptu logaritmu, a nepoužívá ani název ani jiný odkaz na respondentům již z výuky známou logaritmickou funkci (fakticky jde o nezávislé znovuzavedení logaritmu). Druhý přístup, i když využívá stejné úlohy pracovního listu, explicitně pracuje s názvem logaritmické funkce a zachovává schéma středoškolské výuky tohoto tématu. Obě skupiny jsem konfrontoval s testem na nestandardní úlohy o logaritmu a dotazníkem.

Poslední kapitola shrnuje výsledky žáků obou skupin v kontextu stanovených cílů.

1 Fylogeneze a ontogeneze logaritmu

Logaritmus patří mezi nejmladší pojmy, které se dnes vyskytují ve středoškolských učebnicích. První zmínky o logaritmu pochází ze šestnáctého stolení. Derivace a integrály, i když v té době ještě jako dvě různé operace, byly známy dříve. Výpočty spojenými s logaritmem Newton potvrdil svoji domněnku, že derivace a integrace jsou navzájem inverzní operace, což vedlo ke vzniku kalkulu (matematické analýzy). (Edwards, 1979)

1.1 Historie logaritmu

V první části této kapitoly nastiňuji poměrně podrobnou historii vzniku logaritmu, logaritmických tabulek i čísla e. Logaritmem se zabývalo mnoho významných osobností. Uvádím zde pouze ty, které považuji za nejvýznamnější a jejichž výsledky lze vztáhnout k matematické analýze a ke středoškolským učebnicím.

Výklad často doplňuji soudobými poznatky, aby všem tehdejším úvahám dnešní člověk porozuměl. Současné matematické myšlení je nejvíce ovlivněno Descartem a Eulerem, kteří se zasloužili o vznik a rozvoj funkcí. Logaritmus patřil mezi největší objevy počátku sedmnáctého století a umožnil rozvoj mnoha dalších vědních oborů (astronomie, fyzika,atd.).

1.1.1 Aritmetický přístup k logaritmu a vznik logaritmických tabulek

První výpočty, které souvisí se vznikem logaritmu, pochází už z 16. století, kdy Michael Stifel (1487 - 1567) ve svém díle *Aritmetica Integra* z roku 1544 popsal analogii mezi geometrickou a aritmetickou posloupností (Edwards, 1979, s. 143).

0	1	**2**	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10	...
1	3	**9**	**27**	81	**243**	729	2187	6561	19683	59049	...

Například pro čísla 2 a 3 aritmetické posloupnosti platí, že 2 + 3 = 5 a zároveň pro čísla geometrické posloupnosti 9 a 27 platí 9 . 27 = 243. Pro nás je snadné nahlédnout, že se jedná o vztah $3^2 . 3^3 = 3^5 = 243$, ale v té době nebyla známa notace, která by tento zápis umožňovala. Tento vztah se zkoumal čistě numericky a byl považován za správný na základě velkého počtu výpočtů.

"Skotský matematik John Napier (1550 – 1617) při upravování tabulek trigonometrických funkcí ukázal, jak je možné korespondenci mezi aritmetickou a geometrickou posloupností využít pro zjednodušení výpočtů." (Hejný, 1990, s. 242)

Začátkem 17. století objevili nezávisle na sobě techniku logaritmu skotský matematik John Napier a švýcarský matematik Josh Bürgi, který působil v Praze jako hodinář císaře Rudolfa II. Bürgiho tabulky pomohly urychlit astronomické výpočty Johanesi Kepplerovi (Hejný 1990, s. 242). Avšak první tabulky vydal roku 1614 John Napier pod názvem *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, které obsahovaly logaritmické tabulky spolu s návodem na jejich používání (Edwards 1979, s. 142).

Napierův logaritmus se zakládá na představě spojitého pohybu dvou bodů a ukazuje tak na význam fyzikálních představ pro zrod pojmu funkce. Jeho představu můžeme vyjádřit takto:

> Po úsečce $P_0 0$ dlouhé 10^7 se pohybuje bod P rovnoměrným pohybem. Rychlost bodu P je dána předpisem $v_P = \frac{x}{10^7}$, kde $x = |P0|$. Po polopřímce $L_0 L$ se pohybuje bod L rychlostí $v_y = 1$. Oba pohyby začínají současně. Délku $y = |L_0 L|$ můžeme chápat jako funkci délky *x*. (Edwards 1979, s. 148)

Pro přehlednost si diskrétně spočítáme několik hodnot Napierova logaritmu.

V čase $t_0 = \frac{0}{10^7}$: $|P_0 0| = 10^7$

$|L_0 L_0| = 0$

V čase $t_1 = \frac{1}{10^7}$: $|P_0 P_1| = |P_0 0|.t = 10^7 . 10^{-7}$

$|P_1 0| = 10^7 - 1 = 10^7(1 - 10^{-7})^1$

$|L_0 L_1| = 1$

Zde je důležité si uvědomit, že bod P se pohybuje z počátku P_0, ale hodnotu *x* zjistíme odečtením vzdálenosti $|P_0 P_1|$ od celkové délky úsečky $|P_0 0|$.

V čase $t_2 = \frac{2}{10^7}$: $|P_1 P_2| = |P_1 0|.t = 10^7(1 - 10^{-7}) . 10^{-7} = 1 - 10^{-7}$

$|P_2 0| = 10^7(1 - 10^{-7}) - (1 - 10^{-7}) = 10^7(1 - 10^{-7})^2$

$|L_0 L_2| = 2$

V čase $t_3 = \frac{3}{10^7}$: $|P_2 P_3| = |P_2 0|.t = 10^7(1 - 10^{-7})^2 . 10^{-7} = (1 - 10^{-7})^2$

$|P_3 0| = 10^7(1 - 10^{-7})^2 - (1 - 10^{-7})^2 = 10^7(1 - 10^{-7})^3$

$|L_0 L_3| = 3$

...

Dráhu pohybu bodu P po úsečce x můžeme popsat jako geometrickou posloupnost $P_n = 10^7(1-10^{-7})^n\,; n = 0, 1, 2, ...$ a dráhu pohybu bodu L po polopřímce y lze popsat jako aritmetickou posloupnost $L_n = 0 + k\,.\,t\,; k \in \mathbb{R}$

$$0 = |L_0L_0| \leftrightarrow |P_0 0| = 10^7(1-10^{-7})^0$$
$$1 = |L_0L_1| \leftrightarrow |P_1 0| = 10^7(1-10^{-7})^1$$
$$2 = |L_0L_2| \leftrightarrow |P_2 0| = 10^7(1-10^{-7})^2$$
$$3 = |L_0L_3| \leftrightarrow |P_3 0| = 10^7(1-10^{-7})^3$$
...

Tuto závislost geometrické a aritmetické posloupnosti označujeme $Nlog$ (Napierův logaritmus). Její funkční předpis je $y = Nlog\,x$. Nyní ukážeme, jak Napier vytvářel své tabulky.

Napier neměl ve své době notaci, která by mu umožnila takto počítat. Členy první tabulky dostal odčítáním.

0	10000000,0000000	=	$10^7(1-10^{-7})^0$
	$\underline{-1{,}0000000}$		
1	9999999,0000000	=	$10^7(1-10^{-7})^1$
	$\underline{-0{,}9999999}$		
2	9999998,0000001	=	$10^7(1-10^{-7})^2$
	$\underline{-0{,}9999998}$		
3	9999997,0000003	=	$10^7(1-10^{-7})^3$

…

V této tabulce jako vůbec první použil desetinnou čárku (Edwards 1979, s. 143).

Na základě této definice Napier vytvořil celkem tři tabulky. V první tabulce pracoval s časovým úsekem 10^{-7}, ve druhé s časem 10^{-5}. První a druhá tabulka mu sloužily jako pomůcky pro konstrukci třetí tabulky, která měla 21 řádků a 69 sloupců. Každý řádek třetí tabulky je geometrická posloupnost s 69 členy a kvocientem $\left(1-\frac{1}{100}\right)$. Každý sloupec třetí tabulky je geometrická posloupnost s 21 členy a kvocientem $\left(1-\frac{1}{2000}\right)$. Tyto kvocienty zvolil záměrně, aby mohl odkázat na každou buňku v tabulce. Platí $(1-\frac{1}{2000})^{20} \doteq 0{,}990047358 \approx (1-\frac{1}{100}) = 0{,}99$, což znamená, že se poslední člen každého sloupce přibližně rovná prvnímu členu sloupce následujícího.

Napier nad logaritmem vůbec neuvažoval jako nad funkcí. Jeho cílem bylo usnadnit počítání s velkými čísly využitím vztahu aritmetické a geometrické posloupnosti. Dnes můžeme jeho snahu snadno vyjádřit funkcionální rovnicí

$$f(x\,.\,y) = f(x) + f(y).$$

Pro případ $x = y = 1$ musí platit:

$$f(1\,.\,1) = f(1) + f(1)$$

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

$$0 = f(1)$$

Tuto podmínku Napierův logaritmus nesplňuje

$$Nlog\ 1 = 10^7(1 - 10^{-7})^k \neq 0$$

Platí pro něj vztah

$$Nlog\ (x.y) = Nlog\ x + Nlog\ y - Nlog\ 1$$

Proto používání Napierových logaritmů vyžadovalo neustále připočítávání čísla $Nlog\ 1$. To značně komplikovalo používání jeho tabulek. Přesto byly tyto tabulky významným milníkem pro rozvoj přírodních věd. Velmi brzy se dočkaly vylepšení.

Roku 1615 navštívil Henry Briggs[1] Napiera ve Skotsku. Tato návštěva ho přivedla na myšlenku konstrukce vylepšeného logaritmu a nových logaritmických tabulek. Základ jeho logaritmu je 10. Uvažoval, že tento základ je nejpřirozenější, protože používáme desítkovou soustavu. Hlavním vylepšením je, že tyto tabulky pracují s funkcí, která splňuje podmínku *f(x) = 0,* čímž odpadlo připočítávání konstanty. To výrazně usnadnilo jejich používání. Dodnes je jeho logaritmus znám pod pojmem dekadický logaritmus.

Roku 1624 Briggs vydal dílo *Aritmetica logarithmica*, které obsahovalo tabulky čtrnáctimístných logaritmů čísel od 1 do 20 000 a od 90 000 do 100 000. Mezeru zaplnil roku 1628 Holanďan Adrian Vlacqom (1600 – 1667), který vydal desetimístné tabulky logaritmů od 1 do 100 000. Tyto tabulky se staly základem pro všechny logaritmické tabulky vydané následujících 300 let.

Briggs při tvorbě svých tabulek nevycházel z již konstruovaných Napierových tabulek, ale celou tabulku vypočítal znova. Jeho myšlenka při tvorbě logaritmických tabulek byla, že každé číslo lze vyjádřit pomocí odmocnin z deseti. Nejprve postupně vypočítal odmocniny z deseti.

[1] Anglický matematik, první profesor geometrie na Gresham College v Londýně.

Tabulka 1 je rekonstrukce Briggsovy tabulky pro mocniny deseti pomocí programu MS Excel. První sloupec je posloupnost přirozených čísel, *s* je geometrická posloupnost 2^{-n} ; *n=0,1,2,…*, třetí sloupec je umocnění čísla 10 danou geometrickou posloupností. Součástí Briggsovy tabulky byl i čtvrtý sloupec spočtený podle vzorce $\frac{10^s-1}{s}$. Tento sloupec slouží k lineární interpolaci desetinných míst, která se pohybují mimo základní tabulku. Dnes se můžeme na předpis posledního sloupce podívat jako na funkci a můžeme spočítat její limitu

	s	10^s	(10^s -1)/s
0	1	10,0000000	9,0000000
1	1/2	3,1622777	4,3245553
2	1/4	1,7782794	3,1131176
3	1/8	1,3335214	2,6681715
4	1/16	1,1547820	2,4765118
5	1/32	1,0746078	2,3874505
6	1/64	1,0366329	2,3445074
7	1/128	1,0181517	2,3234204
8	1/256	1,0090350	2,3129715
9	1/512	1,0045074	2,3077705
10	1/1024	1,0022511	2,3051759

Tabulka 1

$$\lim_{s\to\infty}\frac{10^s-1}{s} = \ln 10 \ \doteq 2{,}3051759$$

"Pomocí této hodnoty můžeme určit hodnotu čísla $10^{\varepsilon/1024}$.

$$10^{\varepsilon/1024} = 1 + 2{,}3025850\left(\frac{\varepsilon}{1024}\right) = 1 + 0{,}0022486\varepsilon$$

Briggs uvedl, že spočítal 54 druhých odmocnin z čísla 10 s přesností na 14 desetinných míst. Ve skutečnosti spočítal prvních 27 odmocnin s přesností na 16 desetinných míst. V tabulce uvedl tyto odmocniny na 14 desetinných míst, aby měl jistotu, že i čtrnáctá cifra je bez zaokrouhlovacích chyb. Proto dělal výpočty s přesností o 2 řády vyšší. Další odmocniny až do řádu 54 nepočítal namáhavým odmocňováním. Všiml si, že při každém dalším odmocnění se zlomková část zmenší o polovinu. Proto místo úmorného odmocňování jednoduše dělil dvěma." (Edwards, 1979)

$$\sqrt[256]{10} = 1 + 0{,}0045074$$

$$\sqrt[512]{10} = 1 + 0{,}0022511 \approx 1 + \frac{0{,}0045074}{2}$$

My máme vytvořenou tabulku pouze se sedmi desetinnými místy, proto se zde vyskytují chyby způsobené zaokrouhlením. Na základě naší tabulky si vypočteme několik logaritmů stejným postupem, jak je počítal Briggs.

Příklad 1: hledáme $\log 3 = ?$

Prvně hledáme takovou mocninu čísla 10 z naší tabulky, která je největší možná a splňuje podmínku $10^{?} < 3$

$$10^{\frac{1}{4}} < 3$$

Tímto číslem vydělíme číslo 3

$$3 \,:\, 1{,}7782794 \;=\; 1{,}6870230$$

Pro výsledný podíl opět hledáme příslušné číslo z naší tabulky.

$$10^{\frac{1}{8}} < 1{,}6870230$$

Opět vydělíme a budeme tyto kroky opakovat, pokud nám to naše tabulka dovolí.

$$1{,}6870230 \,:\, 1{,}3335214 \;=\; 1{,}5698970 \;>\; 10^{\frac{1}{16}}$$

$$1{,}5698970 \,:\, 1{,}1547820 \;=\; 1{,}0955224 \;>\; 10^{\frac{1}{32}}$$

$$1{,}0955224 \,:\, 1{,}0746078 \;=\; 1{,}0194625 \;>\; 10^{\frac{1}{128}}$$

$$1{,}0194625 \,:\, 1{,}0181517 \;=\; 1{,}0012874 \;>\; 10^{\frac{\varepsilon}{1024}}$$

Poslední podíl už je mimo tabulku 2. Na určení jeho logaritmu použijeme konstantu, kterou již Briggs určoval hodnotu ε.

$$1{,}0012874 = 1 + 0{,}0022486\varepsilon$$

$$\varepsilon = 0{,}0012874 \,:\, 0{,}0022486 \;=\; 0{,}5725377$$

Na určení hodnoty $\log 3$ stačí sčítat příslušné exponenty, které v průběhu výpočtu korespondovaly s odmocninou z desíti.

$$\log 3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{0{,}5725377254}{1024} \;=\; 0{,}4771216$$

Hlavní myšlenka Briggsova logaritmu je převést násobení/dělení na sčítání/odčítání a umocňování převést na násobení. Briggs logaritmus definoval tak, aby platila následující pravidla:

$$log\,(x\,.\,y) = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log(10^n x) = n + \log x$$

1.1.2 Funkční přístup k logaritmu jako k obsahu plochy pod hyperbolou

Nezávisle na numerickém zkoumání logaritmu se ke stejným výsledkům dospělo i zkoumáním obsahu plochy pod hyperbolou. Roku 1647 vydal Gregory Saint-Vincent[2] dílo *Opus geometricum quadraturae circuli sention coni.* Objevil, že obsah plochy pod hyperbolou $xy = 1$ má vlastnosti stejné jako Briggsův logaritmus. Tato skutečnost hrála významnou roli při vzniku Newtonova kalkulu (matematické analýzy).

Isaac Newton objevil roku 1665 obecný tvar binomické řady. Inspiroval se dílem Johna Wallise *Aritmetica infinorum,* kde je uvedena interpolační metoda pro určení kvadratury kruhu pomocí posloupnosti čísel

$$a_n = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n}{2}}\, dt\,.$$

Zkoumání kvadratury kruhu mimo jiné vedlo i k prvním výpočtům souvisejícím s exponenciální funkcí. Newton zdokonalil Wallisovu interpolační metodu o záporné a zlomkové exponenty. Pracoval totiž místo s posloupností čísel s posloupností funkcí

$$f_n(x) = \int_0^x (1 - t^2)^{\frac{n}{2}}\, dt\,.$$

Díky tomu vznikla binomická formule, kterou dnes známe ve tvaru

$$(1 - x^2)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x^{2k}.$$

Práce Gregoryho Staint-Vincenta podnítila Newtona okolo roku 1667 k numerickým výpočtům logaritmů jako hyperbolických oblastí. Napřed rozvinul hyperbolu v řadu

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad (1)$$

Potom využil skutečnost, že plochu pod hyperbolou mohl místo kvadratury určit formálním integrováním. Takto dostal vyjádření

$$A(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

[2] Jezuitský kněz, učitel na jezuitské koleji v Ghentu.

Newton nenazýval $A(x+1)$ logaritmem, ale funkcí, která převádí součin na součet. Aby zkontroloval přesnost svých výpočtů, vypočítal *A(0,9984)* dvěma způsoby. Jednak dosadil $x = -0{,}0016$ do řady (1) a potom podle rozkladu

$$0{,}9984 = \frac{2^8.3.13}{10^5} \ ,$$

podle kterého je A(0,9984) = 8A(2) + A(3) +A(13) − 5A(10). Zjistil, že se tato vyjádření shodují na více jak 50 desetinných míst. Tímto si mimo jiné ověřil, že derivace a integrace jsou navzájem inverzní operace, což dále vedlo ke vzniku kalkulu.

1.1.3 Základ přirozeného logaritmu

Posledním milníkem pro rozvoj logaritmů byl vznik teorie funkcí a objevení jeho inverze k funkci exponenciální. V předchozím textu jsme se již setkali s přirozeným logaritmem deseti, jako limitní hodnotou lineární interpolace Briggsovy tabulky. První zmínka se objevila již roku 1618 v dodatku Napierových tabulek, kde byly uvedeny přirozené logaritmy několika různých čísel. Proto se základ tohoto logaritmu také někdy nazývá Napierova konstanta.

V roce 1683 se švýcarský matematik a fyzik Jacob Bernoulli snažil vypořádat s problémem složeného úrokování. Řešil úlohu: Na účtu máme částku 1.00 korunu, roční úroková míra je 100 %. Jestliže připíšeme úrok jednou, až na konci roku, budeme mít 2.00 koruny. Je-li úrok připisován každého půl roku, musíme částku 1.00 násobit 1.5 dvakrát (50 % úroku z částky 1.00 nám připíší za půl roku, ale na konci roku již dostaneme 50 % z částky zvýšené během předchozího půlroku). Budeme tak mít $1{,}00 * 1{,}5^2 = 2{,}25$. Při čtvrtletním úročení získáme na konci roku $1{,}00 * 1{,}25^4 = 2.4414$, atd. Rozdělíme-li dané období na *n* intervalů se ziskem $\frac{100\,\%}{n}$ v každém z nich, bude se pro dostatečně velké *n* částka na účtu na konci období blížit konstantě e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284\ ...$$

Bernoulli výsledek této limity odhadl na hodnotu mezi 2 a 3, ale v té době nebyl ještě dán do souvislosti do přirozeným logaritmem (O'Connor, 2001).

Roku 1748 napsal Euler knihu *Introductio in analysin infinitorum*. „Byla to práce, která vytvořila koncept funkcí v matematice“ (Boyer, 2004). Euler definoval funkci:

Funkce jako proměnné množství je analytický výraz složený z proměnného množství a čísel nebo konstant.[3]

Při výpočtu konstanty e Euler prvně definoval exponenciálu jako funkci tvaru $y = a^z$, kde $a > 1$. Poté chtěl určit hodnotu pro *z*, když $a^z = y$. Hodnota *z*, pokud se na ni podíváme jako na funkci, se nazývá logaritmus. Dnes je pro nás zcela samozřejmý zápis: $log_a y = z$ právě tehdy, když $a^z = y$.

Pro Eulera nebyl logaritmus počítacím nástrojem jako pro jeho předchůdce, ale inverzní funkcí pro funkci exponenciální. A protože je možné mít nekonečně mnoho základů, je i nekonečně mnoho logaritmických funkcí.

Stanovil „zlaté pravidlo pro logaritmy“, které říká, že když známe $log_a x$, můžeme snadno najít logaritmus $log_b y$, kde b je jiný základ. Myšlenka je jednoduchá a silná. Máme $z = log_b y$, takže $y = b^z$ a zároveň platí $log_a y = log_a b^z = z\, log_a b$. Z toho vyplývá $log_b y = z = \frac{log_a y}{log_a b}$. Proto můžeme říct, že podíl dvou logaritmů je stejný nehledě na jejich základ

$$\frac{log_b y}{log_b x} = \frac{log_a y / log_a b}{log_a x / log_a b} = \frac{log_a y}{log_a x}\ .$$

Dále se Euler snažil získat rozvoj nekonečné řady pro exponenciální a logaritmickou funkci, ale základní charakter jeho textu zakazoval použití derivace nebo integrace. Prvně rozvinul řadu pro exponenciální funkci $y = a^x$ pro $a > 1$. To udělal tak, že zvolil ω jako nekonečně malé číslo, které ačkoli se nerovná 0, tak platí $a^\omega = 1 + \psi$, kde ψ je také nekonečně malé číslo. Pro něj byla ω téměř 0, tak že $a^\omega \approx a^0 = 1$ a rozdíl je nekonečně malé množství $\psi = a^\omega - 1$. Použil zde dvě nekonečné malé hodnoty. Pro jejich spojení použil vztah $\psi = k\omega$. Nyní potřeboval rozhodnout, jestli *k* je konečné nebo nekonečné číslo. Na základě několika konkrétních příkladů zjistil, že *k* má konečnou hodnotu, která závisí na hodnotě základu *a* (Dunham, 1999).

Pro konečné číslo *x* hledal rozvoj a^x. Zavedl další vztah: $j = x/\omega$ pomocí kterého přepsal funkci $a^x = (a^\omega)^{x/\omega} = (1 + k\omega)^j = (1 + kx/j)^j$. Funkci rozvinul podle Newtonovy obecné binomické řady:

$$a^x = 1 + j\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2\,.\,1}\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3\,.\,2\,.\,1}\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)}{4.3.2\,.\,1}\left(\frac{kx}{j}\right)^4 + \cdots$$

[3] Euler, Introduction to Analysis of the Infinite, Book I, trans John Blanton, Springer-Verlag, New York, 1988

$$a^x = 1 + kx + \frac{(j-1)}{j}\left(\frac{x^2k^2}{2\,.\,1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j\,.\,j}\left(\frac{x^3k^3}{3\,.\,2\,.\,1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)(j-3)}{j\,.\,j\,.\,j}\left(\frac{x^4k^4}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\right) + \cdots$$

Ale x je konečné a ω je nekonečně malé, tak $j = x/\omega$ musí být nekonečně velké. Proto Euler mohl tvrdit, že $\frac{j-1}{j} = 1, \frac{j-2}{j} = 1$, adt., čímž dospěl už v 18. století k limitním úvahám (Dunham, 1999). V dnešní době jednoduše napíšeme $\lim_{j\to\infty}(j-n)/j = 1$ pro všechny $n \geq 1$. Na základě tohoto dospěl ke zjednodušení binomického rozvoje:

$$a^x = 1 + kx + \left(\frac{x^2k^2}{2\,.\,1}\right) + \left(\frac{x^3k^3}{3\,.\,2\,.\,1}\right) + \left(\frac{x^4k^4}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\right) + \cdots$$

Prvně x položil rovno 1, čímž vyjádřil řadu pro základ a v závislosti na k

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{2\,.\,1} + \frac{k^3}{3\,.\,2\,.\,1} + \frac{k^4}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} + \cdots$$

Druhá úvaha byla, proč nevybrat konkrétní základ a pro $k = 1$? Položil proto $x = k = 1$ a tím dostal předpis pro speciální základ

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2\,.\,1} + \frac{1}{3\,.\,2\,.\,1} + \frac{1}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} + \cdots$$

Toto číslo přibližně spočítal na hodnotu 2,71828182845904523536028. Tato konstanta se značí v dnešní době písmenem e a nazývá se Eulerovým číslem. Logaritmus s touto konstantou jako základem nazýváme jako přirozený nebo hyperbolický. Dnes je tento vztah, zapisován jako

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,.\,1} + \frac{x^3}{3\,.\,2\,.\,1} + \frac{x^4}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

a považována za jeden z nejúžasnějších v matematice. (Dunham, 1999, s. 26).

1.2 Ontogeneze logaritmu

Pojem logaritmus se v dnešní výuce matematiky objevuje až v tématu funkcí. Důvod, proč tomu tak je, stručně vysvětluje Oldřich Odvárko v úvodu kapitoly *Exponenciální a logaritmická funkce* v učebnici pro gymnázia.

"Partie o exponenciálních funkcích, logaritmických funkcích a logaritmech směřovala ve středoškolské matematice především k numerickým výpočtům pomocí logaritmických tabulek a logaritmického pravítka. Tyto mechanické výpočetní pomůcky se staly v době počítačů historií. Ale exponenciální a logaritmické funkce tím neztratily − jejich užití ve fyzice, chemii, biologii apod. je velmi mnohostranné." (Odvárko, 1993, s. 123)

V této části kapitoly zhodnotíme středoškolské učebnice z hlediska výskytu logaritmů, pokusíme se nalézt, jaký význam má logaritmus v tématu funkcí, a popíšeme využití a význam logaritmu v běžném životě.

1.2.1 Analýza středoškolských učebnic

Učebnice je dokument, ve kterém učivo nabývá nejkonkrétnější podobu. Chceme-li objektivně zhodnotit dnešní výuku logaritmů na středních školách, musíme se zaměřit na učebnice. Funkce učebnice jsou podle Průchy didaktická a organizační. Didaktické funkce jsou: informativní (zprostředkovávají informace o učivu), formativní (osvojené systémy vědomostí a dovedností se mají stát vnitřními hodnotami žáka), metodologická (cílem je, aby si žáci osvojovali i metody poznání). Organizační funkce jsou: plánovací, motivační, řídící proces výuky, kontrolní a sebekontrolní.

Propedeutika

Nejprve se zaměříme na propedeutické poznatky o logaritmické funkci. Logaritmus se již nevyužívá pro numerické počítání. V dokumentech RVP pro gymnázia a RVP pro střední odborné školy se poprvé pojem logaritmus objevuje v tématu funkcí, kdy tvoří společnou kapitolu s funkcí exponenciální. Za jedinou propedeutiku logaritmu lze považovat práci s exponenty v prvním ročníku střední školy.

Hlavním zdrojem informací o propedeutice logaritmu pro nás bude učebnice *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky*, která je první středoškolskou učebnicí matematiky používanou na většině gymnázií. Obdobný obsah nalezneme i v učebnicích pro jiné typy středních škol.

Učebnice shrnuje látku základní školy a připravuje žáky na studium matematiky na škole střední. Jednotlivé kapitoly jsou: Číselné obory, Množiny, Základní poučení o výrocích, Elementární teorie čísel, Mocniny s přirozeným a celým exponentem, Mnohočleny, Lomené výrazy, Pravoúhlý trojúhelník.

Už z jednotlivých kapitol vyplývá, že celá učebnice je propedeutická pro všechna témata střední školy. Žáci se setkají i s goniometrickými funkcemi, zatím pouze jako numerickým nástrojem pro práci s úhly pravoúhlého trojúhelníku. Pojem logaritmu se v učebnici nevyskytuje. Vzhledem k provázanosti exponenciální a logaritmické funkce je práce s exponenty jediná propedeutika logaritmu.

V kapitole "Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem" si žáci mají zopakovat poznatky získané na základní škole a dále je prohloubit. Hlavním cílem je žáky naučit zjednodušovat číselné výrazy s mocninami a formulovat věty pro práci s exponenty. Ukážeme si pouze nejdůležitější větu.

Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro libovolná celá čísla r, s platí:

$$a^r \,.\, a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \;\;, \;\; a \neq 0$$

$$(a \,.\, b)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \;\;, \;\; b \neq 0$$

Jedná se o první setkání žáků s manipulací s exponenty, proto je omezen definiční obor exponentů pouze na celá čísla.

Výuka logaritmu na středních školách

Rámcově vzdělávací program řadí logaritmus do tématu funkcí. Funkce se začínají probírat na střední škole ve druhém ročníku a dělí se na dvě části:

1. Funkce (lineární funkce, kvadratická funkce, funkce absolutní hodnota (pouze v gymnaziálních učebnicích), lineární lomená funkce, mocninné funkce, funkce druhá odmocnina, exponenciální funkce, logaritmické funkce)
2. Goniometrie (goniometrické funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, sinová věta, kosinová věta)

Podle typu školy jsou tyto části ve dvou různých učebnicích na sebe navazujících, v jedné učebnici, nebo se probírají v různých ročnících. Učebnice, ze kterých vycházíme, jsou elektronická učebnice www.realisticky.cz, kterou vytvořil Martin Krynický, a tištěné učebnice z nakladatelství Prometheus:

- *Matematika pro gymnázia – Funkce*; Oldřich Odvárko (1)
- *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť − 3.část*; Oldřich Odvárko, Jana Řepová (2)
- *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU*; Emil Calda (3)

Elektronická učebnice Martina Krynického nemá číselné označení, protože je analyzována zvlášť.

Pro všechny učebnice je struktura výkladu stejná, pouze elektronická učebnice má drobné odlišnosti. Nejdříve charakterizujeme jednotlivé prvky kapitoly *Exponenciální a logaritmické funkce* názvem podkapitoly, hlavními definicemi/větami a hlavními typy příkladů k procvičení. Uvedeme pouze podkapitoly zabývající se přímo logaritmem. Definice i příklady jsou ve všech učebnicích obdobné, proto budeme v závorce uvádět, z které učebnice dané ukázky pochází.

Logaritmická funkce

V tištěných učebnicích se jedná o první podkapitolu kapitoly o logaritmech. Nejprve si žáci zopakují, co to je inverzní funkce. Graf logaritmické funkce je zaveden pomocí osové souměrnosti ke grafu funkce exponenciální.

Definice:

Logaritmická funkce o základu a je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$; *a* je libovolné kladné číslo různé od jedné. (1)

Příklady:

- Načrtněte grafy logaritmických funkcí: $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, ... (1)
- Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá; využijte přitom znalosti o průběhu logaritmických funkcí: $\log_2 5 > 0$, $\log_{0,1} 1 = 0$, ... (2)
- Určete definiční obor funkcí: $y = \log_5(x + 1)$, $y = \sqrt{\log_2 x}$, ... (3)

Logaritmus

Definice:

Logaritmus každého kladného čísla *b* při základu *a* je roven číslu *v*, pro které platí $a^v = b$. (3)

Příklady:

- Určete: $\log_7 49$, $\log_{49} 7$, $\log_{10} \sqrt{10}$, $7^{\log_7 2}$, ... (3)
- Určete všechna $x \in (0, +\infty)$, pro která platí: $\log_5 x = -1$, $\log_5 x = -\frac{1}{3}$, ... (2)
- Určete všechna taková $a \in R$, aby platilo: $\log_a 4 = 2$, $\log_a 0{,}0001 = -2$, ... (1)

Věty o logaritmech

V učebnici (3) se tato kapitola jmenuje "*Počítání s logaritmy*"a zahrnuje poznatky, které ostatní učebnice uvádějí v samostatné podkapitole "*Přirozený a dekadický logaritmus*".

Věty:

1. Pro každé $a \in R^+ \setminus \{1\}$ a pro všechna kladná reálná *x* ,*y* platí
$$\log_a(x\,.\ y) = \log_a x + \log_a y$$
2. Pro každé $a \in R^+ \setminus \{1\}$ a pro všechna kladná reálná *x* ,*y* platí (2)
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
3. Pro každé $a \in R^+ \setminus \{1\}$ a pro všechna kladná reálná *x* ,*y* platí
$$\log_a x^y = y\,.\log_a x$$

Příklady:

- Vypočítejte: $\log_{10} 20 + \log_{10} 50$, $\log_5 50 - \log_5 2$, $\log_3 9^{2,5}$, ... (2)
- Zjistěte všechna $x \in (0, \infty)$, pro která platí:

  $\log_3 x = -\log_3 4 + \log_3 6 - \frac{1}{4}\log_3 0{,}5$, ... (1)
- Tlak vzduchu *p* (v Pa) závisí na nadmořské výšce *h* (v km) podle přibližného vztahu $p = p_0 \left(\frac{22}{25}\right)^h$, kde p_0 je tlak u mořské hladiny. Určete, v jaké nadmořské výšce je tlak vzduchu poloviční.

Pouze v učebnici (3) se vyskytuje numerické počítání s hodnotami logaritmů, které jsou vyjádřeny desetinným číslem.

Příklad:

Je známo, že:

$\log_{10} 2 \cong 0{,}301$, $\log_{10} 3 \cong 0{,}477$, $\log_{10} 4 \cong 0{,}602$, $\log_{10} 5 \cong 0{,}699$

$\log_{10} 6 \cong 0{,}778$, $\log_{10} 7 \cong 0{,}845$ $\log_{10} 8 \cong 0{,}903$ $\log_{10} 9 \cong 0{,}954$

Vypočtěte:

$\log_{10}\frac{5}{8}$, $\log_{10} 21$, $\log_{10} 16$, $\log_{10} \sqrt[3]{14}$, $\log_{10} 0{,}2$, $\log_{10} 600$, $\log_{10} 0{,}0006$

Logaritmické a exponenciální rovnice

Tato kapitola neobsahuje žádnou teorii.

Příklady:

- $\log_{10} x = 2 - \log_{10} 5$, $\log_4(2x+5) - \log_4(x+1) = 1$, ... (1)
- $\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$, ... (3)
- $5^{x-2} = \frac{10}{3}$, $5^{3-x} = 3^{2x-1}$, ... (2)

Přirozený a dekadický logaritmus

Tato podkapitola není obsažena v učebnici (3). Nicméně její obsah je součástí předchozí kapitoly a Eulerovo číslo je zde zmíněno jako prosté konstatování, že existuje.

Cílem této kapitoly je představit významnou matematickou konstantu e – Eulerovo číslo a zavést vzorec pro převod logaritmu na libovolný základ. Eulerovo číslo je v učebnicích zaváděno jako základ exponenciální funkce, která má právě jeden společný bod s přímkou $y = x + 1$. Jeho hodnota je mezi celými čísly 2 a 3.

Věta:

Pro všechna kladná reálná čísla *r*, *s* různá od jedné a pro každé kladné reálné číslo *t* je

$$\log_r t = \frac{\log_s t}{\log_s r}. \quad (1)$$

Příklady:

- Vypočtěte: $\log_2 3$, $\log_6 9$, $\log_4 11$, ... (2)
- Počet bakterií jisté kultury vzroste za jednu hodinu o 32%. Vyjádřete závislost počtu bakterií na čase jednak vzorcem $N_t = N_0 \,.\, a^t$, jednak vzorcem $N_t = N_0 \,.\, e^{\lambda t}$, kde λ je konstanta. ($N_0$ značí počet bakterií v čase 0 hodin, N_t je počet bakterií v čase *t*.) (1)
- Rentgenové paprsky o vlnové délce $0{,}01\mu$m procházejí hliníkovou vrstvou. Intenzita záření v závislosti na tloušťce vrstvy lze vyjádřit vzorcem $\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \,.\, e^{-\alpha x}$. Přitom I_0 je číselná hodnota počáteční intenzity, *I* číselná hodnota intenzity průchodu vrstvou silnou *x* cm, α je číselná hodnota absorpčního koeficientu, pro hliník je 5,4. Vypočtěte procentový úbytek I_0 po průchodu vrstvou 0,1 cm silnou. Určete tloušťku vrstvy potřebnou k tomu, aby bylo $I = 0{,}5 \,.\, I_0$. (2)

Struktura kapitoly o logaritmech je jasně daná svou příslušností k tématu funkce. Záleží pouze na učiteli, kolik času věnuje jednotlivým podkapitolám. Příklad konkrétní výuky logaritmů můžeme nejsnadněji pozorovat v učebnici Martina Krynického (*www.realisticky.cz*), kde se vyskytují drobné rozdíly od tištěných učebnic.

V první řadě je to změna pořadí podkapitol. Autor nejdříve žáky seznámí s logaritmem obecně (podkapitola Logaritmus), kde se věnuje numerickým výpočtům na základě inverze k exponenciále. I zde jsou výsledky celá čísla, kmenové zlomky a výrazy typu $\sqrt[k]{n}\,;\ k,n \in N$. Také se zde objevuje upřesňování definic, kdy se žáci prvně dozvědí definici bez předpokladů, které mají doplnit po spočítání určitého počtu příkladů. Následuje podkapitola Logaritmická funkce, která je rozdělená na dvě části. V první se žáci seznámí s grafem. Látka probíraná ve druhé části se nevyskytuje v žádné tištěné učebnici. Autor (učitel) nás zde seznamuje s praktickým využitím dekadického logaritmu příkladu výpočtu pH, viz obrázek.

Zatímco exponenciální funkce je nejrychleji rostoucí funkcí, **logaritmus roste ze všech funkcí nejpomaleji** a kvůli této vlastnosti se často používá.

Logaritmus známe z chemie: pH je definována jako absolutního hodnota dekadického logaritmu (logaritmu o základu 10) koncentrace iontu H_3O^+ v roztoku. Proč?

Př. 2: Doplň tabulku:

koncentrace H_3O^+ **v exponenciálním tvaru**	10^{-1}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-14}
koncentrace H_3O^+ **desetinným číslem**				
pH				

$c=10^{-1}$: $\left|\log_{10}10^{-1}\right|=\left|-1\right|=1$ $\qquad$ $c=10^{-5}$: $\left|\log_{10}10^{-5}\right|=\left|-5\right|=5$

$c=10^{-7}$: $\left|\log_{10}10^{-7}\right|=\left|-7\right|=7$ $\qquad$ $c=10^{-14}$: $\left|\log_{10}10^{-14}\right|=\left|-14\right|=14$

Obrázek 1: 1.1 Výuka Krynický

První věta ukázky není matematicky správně. Má vytvořit prvotní představu o průběhu funkce. Její cíl je hlavně ilustrační.

Učebnice se neomezuje pouze na jedno praktické využití, ale uvádí více příkladů: "Logaritmus používaný při výpočtu pH elegantně zobrazil obrovský rozsah koncentrací na čísla od 1 do 14 (kdybychom psali místo pH koncentrace ve tvaru desetinných čísel, unulovali bychom se k smrti). Podobným způsobem jako u pH se logaritmů používá k zachycení intenzit zvuku. Obrovský rozsah slyšitelných zvuků $(10^{-12}W\mathrm{m}^{-2}$ až $10^{0}W\mathrm{m}^{-2})$ se zachycuje pomocí logaritmické stupnice decibelů. Pokud se hladina zvuku zvýší z 90 na 110 decibelů, energie, kterou zvuk přenáší, vzrostla 100krát." (www.realisticky.cz)

Poslední rozdíl je umístění slovních úloh na logaritmy do samostatné závěrečné podkapitoly, kdežto v tištěných učebnicích jsou součástí podkapitol "Věty o logaritmu" a "Přirozený a dekadický logaritmus". Příčinou těchto rozdílů je, že autor elektronické učebnice je zároveň učitel fyziky a také se jedná o praxí vyzkoušené postupy výuky.

Logaritmy patří na středních školách mezi nejnáročnější látku. Krynického elektronická učebnice vnáší do výuky logaritmů mnoho inovací (jiné pořadí kapitol, více praktických ukázek využití logaritmu, samostatná podkapitola na slovní úlohy), které usnadňují pochopení a přibližují je reálnému světu. Vzhledem k faktu, že se nejedná o běžnou učebnici, můžeme předpokládat, že se většina středoškoláků setká se strukturou výuky prezentovanou výše pomocí učebnic z nakladatelství Prometheus.

1.2.2 Praktické využití logaritmu

Podle mým osobních zkušeností žáky nejvíce zajímají praktická využití matematiky. U některých témat se využití ukazuje hůře, ale právě logaritmy mají široké uplatnění, a to i přesto, že se již nevyužívají k numerickým výpočtům. Nyní vyjmenujeme několik vědních oborů, které využívají logaritmy.

Fyzika

Akustika: Lidské ucho slyší zvuky v ohromném rozpětí intenzit. Logaritmováním poměru druhé mocniny zvukového tlaku p a druhé mocniny tlaku p_0, stanoveného nejslabšího slyšitelného zvuku, vznikne relativní číslo, jehož jednotka je označena jako bel. Běžně se ovšem pracuje s desetkrát podrobnější jednotkou decibel (dB). Označíme-li hladinu akustického tlaku L_p , pak:

$$L_p = 10 \,.\log\frac{p^2}{p_0^2} = 20 \,.\log\frac{p}{p_0}$$

V Bellových laboratořích se roku 1923 při pokusech s dobrovolníky zjistilo, že průměrný jedinec začne vnímat zvuk, je-li v komoře hladina akustického tlaku $p_0 = 2 \,.\, 10^{-5}$ Pa, čemuž odpovídá hladina slyšitelnosti 0 dB.

Více než poměru zvukových tlaků se používá výpočet pomocí měření hladiny intenzity zvuku L_I:

$$L_I = 10 \,.\log\frac{I}{I_0} \qquad \text{(Holliday, 2006)}$$

Intenzita I_0 odpovídá zvukovému tlaku p_0.

Decibel je fyzikálně bezrozměrná jednotka, obdobně jako třeba procento. Definice decibelu lze dát do souvislosti s objevením Fechner-Weberova zákona, že totiž lidské tělo vnímá podněty logaritmicky jejich intenzitě (i velké změny velkých podnětů způsobují jen malé změny počitků). Využívá i v elektrotechnice, například pro sílu signálu wi-fi.

Dosah jakéhokoliv rádiového spojení je založen v podstatě na jediné věci: úroveň signálu, který vyjde z výstupu vysílače, může po cestě poklesnout jen natolik, aby byla na vstupu přijímače vyšší, než je jeho citlivost (tedy schopnost ho ještě zpracovat). Veličinu G (gain – zisk), používanou v elektrotechnice můžeme spočítat obdobným způsobem zlogaritmováním podílu výkonu a příkonu. Jednotkou je opět decibel

Učebnice matematiky obsahují příklady na rozpad radioaktivních prvků a rentgenové záření, které také můžeme zahrnout do oblasti fyziky.

Psychologie

Psychologie mimo jiné zkoumá závislost mezi velikostí podnětu a jeho vnímáním. Tuto závislost popsal německý fyziolog Ernst Heinrich Weber (1795 – 1878). Weber –Fechnerův psychofyzikální zákon:

> Změna fyziologického vjemu v je úměrná relativní změně jeho fyzikální příčiny p. Tedy platí: $dv = konst.\frac{dp}{p}$,odkud $v = konst.\ln\frac{p}{p_0}$, kde $p_0$je referenční hodnota veličiny hodnotící příčinu vjemu. Na základě toho je možné Weber – Fechnerův zákon psát též ve tvaru: míra fyziologického vjemu je úměrná logaritmu míry jeho fyzikální příčiny. (Reichl, 2008)

Chemie

Využití logaritmů pro výpočet pH je ukázáno výše v ukázce z učebnice Martina Krynického. Dále se zde využívají různé logaritmické stupnice pro popsání zkoumaných jevů.

Biologie

Při popisu nerovnoměrnosti růstu a vývinu, přesněji změn v proporcích organizmů vyvolaných změnami v absolutní velikosti celého organizmu nebo jeho jednotlivých částí, tzv.

alometrii, se také využívá logaritmu. Malá změna x v celkové velikosti těla organizmu může vést k velkému a neúměrnému zvětšení y rozměrů přídavků – například u hmyzu se může jednat o nohy, tykadla, apod. Vztah mezi těmito veličinami je následující:

$$y = \alpha x^{\beta} \text{ , neboli } \quad \log y = \log \alpha + \beta \log x$$

kde α, β jsou konstanty. (Sprent 1972, s. 25)

Ekologie

Jednou z oblastí zkoumání ekologie je také druhová různorodost, neboli diversita. Indexy diversity popisuje jistou vyměřenou oblast přírody. Základem každého hodnocení je prostý počet druhů ve vzorku (fytocenologickém snímku) S, čili takzvaná druhová bohatost. Velmi často bývá použit Shannon-Wienerův index druhové diversity (též nazýván jako Shannonův index či nepřesně jako Shannon-Weaverův index):

$$H' = -\sum_{i} p_i \log_2 p_i$$

kde p_i je relativní zastoupení i-tého druhu. Na jeho základě může být vyjádřena druhová vyrovnanost $e = \frac{H'}{\log_2 S}$. (Matějka 2007)

Finanční matematika

Zde se přímo nesetkáme s logaritmem, ale s exponenciální rovnicí. Vzorec pro složené úročení je

$$j_t = j_0 \,.\, (1 + d)^t \,.$$

Jistinu j_t po zúročení spočítáme jako jistinu před zúročením, *d* je úrok a *t* je doba za kterou se jistina úročí. V případě, kdy se ptáme na dobu *t*, také využijeme logaritmus

$$t = \frac{\log\left(\frac{j_t}{j_0}\right)}{\log(1 + d)} \,.$$

V učebnicích se podobné příklady v tématu o logaritmech nevyskytují.

1.3 Srovnání fylogeneze a ontogeneze

"Pojem funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů v matematice a od jistého školního stupně i jedním z nejfrekventovanějších pojmů školské matematiky. Při studiu fylogeneze tohoto pojmu vidíme, jak těžce a pomalu se pojem funkce do matematiky dostával; formulaci samotné definice a obecnějšímu pohledu na funkční závislost předcházela staletí vývoje kauzálního myšlení a důkladné práce s konkrétními reprezentanty funkcí." (Kopáčková 2002)

Dlouhou dobu sloužil logaritmus hlavně k numerickým výpočtům a práci s velkými čísly. Na jeho principu vznikly první mechanické kalkulátory a logaritmické pravítko. Ty jsou již překonány elektrickými kalkulátory a počítači. V dnešní výuce matematiky se spíše než s logaritmem pracuje s logaritmickou funkcí. Jak jsme ukázali v historické části této kapitoly, numerická práce s logaritmem umožňuje jeho hlubší pochopení a jeho snazší aplikaci. Pro některé vědní obory je význam logaritmu veliký.

Pro vznik logaritmu byl stejně důležitý aritmetický přístup jako přístup funkční. Oba přístupy spojovala definice, kterou můžeme vyslovit takto:

Pro všechna kladná reálná čísla je logaritmus taková funkce, která převádí binární operaci násobení na binární operaci sčítání.

$$\log(x\,.\,y) = \log(x) + \log(y)$$

Tato definice je příčinou vzniku logaritmů. V dnešní výuce to je důsledek, který vyplývá z exponenciální funkce, pomocí níž je na středních školách logaritmus zaváděn.

Logaritmus každého kladného čísla *b* při základu a je roven číslu *v*, pro které platí $a^v = b$.

Z výuky úplně vymizely ukázky práce s logaritmickými tabulkami a pro žáky může být velmi obtížné představit si jeho význam a využití. V žádné učebnici není ukázáno, jak lze získat logaritmus čísla, které není celočíselnou či racionální mocninou základu. Jeho propedeutika je omezena na práci s mocninami.

Srovnáním fylogeneze a ontogeneze jsme dospěli k otázkám. Je správné omezit logaritmus pouze na logaritmickou funkci? Má logaritmus jako numerický nástroj nějaké možnosti využití v dnešní výuce? Na tomto teoretickém základě je postaven výzkum a formulovány cíle zkoumání této diplomové práce.

2 Výzkum

V první kapitole jsme se dozvěděli, že pro vznik logaritmů byl stejně důležitý jak numerický, tak funkční přístup k tomuto tématu. Analýza učebnic ukázala, že výuka logaritmů na středních školách upřednostňuje funkční přístup, který zavádí logaritmus jako inverzi k exponenciální funkci a numerická práce s logaritmem je minimální.

V průběhu svého studia jsem se setkával s tvrzením, že logaritmy jsou nesmírně důležité a užitečné, ale nikdy jsem se nesetkal s konkrétními příklady, které by mě o této skutečnosti přesvědčily. Slovní úlohy středoškolských učebnic, nejčastěji na rozpad radioaktivních prvků, jsou natolik speciální, že nijak nepřibližují praktické využití logaritmu žákovu myšlení. Znalost logaritmů se na všech typech škol určuje podle schopnosti správně řešit exponenciální a logaritmické rovnice. Osobně jsem pochopil význam logaritmů až při psaní své bakalářské práce, v níž jsem se věnoval vývoji matematiky v sedmnáctém století.

2.1 Cíle výzkumu

„Abstraktní znalost, která je opřena o separované a univerzální modely, je neformální. Znalost, která tuto oporu postrádá, která je uchována pouze pamětí, je formální. To je naše základní vymezení formální, resp. neformální znalosti. Slova formální a neformální označují dvě krajnosti. Skutečnost se odehrává většinou mezi těmito póly.“ (Hejný, 2001, str. 120)

Na základě osobní motivace a výše uvedených poznatků o fylogenezi a ontogenezi logaritmu jsem určil čtyři cíle své diplomové práce:

1. Určit míru formální a neformální znalosti o logaritmu u žáků střední školy.
2. Nalézt a popsat nejčastější žákovské problémy spojené s osvojením logaritmů.
3. Zhodnotit využitelnost bezkontextového užití vlastností popsaných funkcionálními rovnicemi k výuce logaritmů.
4. Zjistit, jaký je vliv alternativního přístupu k procvičování logaritmu na úspěšnost žáků v řešení úloh vedoucích k použití logaritmů.

2.2 Charakteristika výzkumu

Byly porovnávány dvě skupiny žáků druhého ročníku střední školy v době, kdy absolvovali výuku všech tříd funkcí, včetně goniometrických, a měli časový odstup od bezprostřední výuky logaritmů. Výzkum probíhal ve dvou po sobě následujících fázích.

V první fázi byla východiskem definice logaritmu pomocí jeho základní vlastnosti vyjádřené funkcionální rovnicí:

> Logaritmus je funkce, která převádí binární operaci násobení na binární operaci sčítání; přesněji, pro všechna kladná x a y je
>
> $$\log(x \,.\, y) = \log(x) + \log(y).$$

Definice vychází z historických poznatků a ve středoškolských učebnicích je uváděna jako věta.

V jedné skupině, pro přehlednost ji nazývejme Historická, byla tato definice představena jako obecný matematický konstrukt. Funkce nebyla nazvána logaritmem a označení log bylo nahrazeno obecným označením B, podle autora dekadického logaritmu Henryho Briggse. Žákům tedy nebyla asociována spojitost s jim již známým konceptem logaritmu. Výzkum byl žákům představen jako ověřování, zda daný historický konstrukt je použitelný pro řešení zadaných úloh. Až na konci této fáze bylo žákům sděleno, že neznámým matematickým konstruktem je logaritmus.

Druhá skupina, nazývejme ji Procvičovací, dostala definici v podobě uvedené výše, již v první fázi tedy věděla, že jde o procvičování logaritmů. Výzkum byl žákům představen jako zkoumání znalostí o logaritmech u žáků střední školy.

Ve druhé fázi žáci dostali vypracovat test, v němž byly nestandardní úlohy na logaritmus. Test byl pro obě skupiny stejný. Na závěr této fáze ještě každá skupina vyplnila dotazník, který se lišil podle průběhu první fáze. Otázky se vztahovaly k průběhu výzkumu a také k funkcím obecně.

2.2.1 Výzkumné nástroje

Výzkumnými nástroji byly pracovní list, test a dotazník. Pracovní list obsahoval různé úlohy. Každá byla zaměřena na jiný číselný obor tak, aby kopírovala propedeutiku exponenciální funkce uvedené v učebnicích pro první roční střední školy, většinou nazvané „Základní poznatky z matematiky“. Jednotlivé úlohy se dále dělily na příklady, které dodržovaly posloupnost od nejlehčího k nejtěžšímu. Zadání úloh i jednotlivé příklady byly pro obě skupiny stejné. Historická skupina pracovala s obecným předpisem funkce B(x), Procvičovací skupina pracovala s předpisem logaritmické funkce. Zadání úloh bylo co nejjednodušší, aby žáci měli prostor pro vlastní kreativní řešení.

Test obsahoval nestandardní úlohy na logaritmus, které také obsahovaly dílčí příklady. Zde se však příklady dělily pouze na jednodušší, které by na základě procvičování měla zvládnout většina žáků, a obtížnější zaměřené na hlubší porozumění dané problematice. Test obsahuje všechny reprezentace funkce (předpis, tabulka, graf). Úlohy testu byly záměrně vybrány tak, aby se s nimi žáci nikdy dříve při výuce logaritmů nesetkali. Některé autor vytvořil sám, některé jsou vybrány z dostupných zdrojů a upraveny. Některé příklady lze řešit i jinými nástroji než je logaritmus.

Závěrečný dotazník byl uzpůsoben konkrétní testované skupině. Kromě zpětné vazby také zjišťoval i žákovy subjektivní názory na jednotlivé třídy funkcí, reprezentaci funkcí a obsahoval otevřené otázky týkající se průběhu výzkumu a logaritmu.

2.2.2 Vyhodnocení dat

K analýze dat jsem přistupoval hlavně z kvantitativního hlediska. Soubor respondentů byl relativně malý, obsahoval 59 žáků, kteří byli rozděleni do dvou skupin podle třídy, kterou navštěvovali.

Nejdříve byla porovnávána celková úspěšnost vypracování jednotlivých úloh pracovního listu u obou skupin. Hodnocení správnosti jednotlivých úloh je souhrnem hodnocení správnosti jednotlivých příkladů. Vzhledem k charakteru příkladů byl každý správně vyřešený příklad ohodnocen jedním bodem, chybnému nebo neúplnému řešení nebyl přidělen žádným bod. Tímto způsobem jsem dostal míru úspěšnosti jednotlivých žáků v jednotlivých úlohách. Ta byla následně použita pro celkové hodnocení úspěšnosti řešení dané úlohy celou skupinou, která byla vyjádřena v procentech. Prvním relevantním výsledkem byla celková procentuální míra úspěšnosti v jednotlivých úlohách Historické skupiny a její porovnání s Procvičovací skupinou vyjádřena grafem. Jedná se o celkový počet správných příkladů vyjádřený v procentech vůči nejvyššímu možnému počtu správných řešení v dané skupině. Tento údaj jsem ještě doplnil aritmetickým průměrem počtu správných příkladů pracovního listu u každé skupiny.

Následně byly porovnány skupiny v jednotlivých úlohách pomocí procentuální úspěšnosti jednotlivých příkladů a byla provedena analýza chyb. Zajímalo mě, zda se chyby vztahovaly k jednotlivým skupinám, nebo byly pro obě skupiny společné.

Test byl hodnocen stejným způsobem jako pracovní list. Opět mě nejvíce zajímalo srovnání Historické a Procvičovací skupiny. Každá úloha byla dále analyzována pomocí jednotlivých příkladů, kde jsem se snažil zjistit, zda se u řešení příkladů objeví charakteristické znaky a zda budou závislé na určité skupině.

Dotazník obsahoval uzavřené i otevřené odpovědi. Historická skupina měla v dotazníku dvě otázky navíc, které se vztahovaly k historickému charakteru první fáze výzkumu. V nich mě zajímalo, kdy žáci zjistili, že historickým matematickým konstruktem je logaritmus a zda jim tento přístup přišel přínosný.

Odpovědi na uzavřené otázky byly v rámci skupin porovnány procentuální četností pomocí grafu. U otevřených otázek jsem se snažil odpovědi kategorizovat v rámci všech respondentů, pokud to bylo možné, nebo alespoň v rámci skupiny.

Existuje množství faktorů, které mohou výsledky výzkumu ovlivnit. Jsou to jednak inherentní rozdíly mezi oběma skupinami a dále faktory související s výzkumem samotným, z nichž za hlavní považuji tyto:

- výzkum byl prováděn externím vyučujícím, kterého žáci viděli poprvé v životě, mohou nastat různá nedorozumění a ostych ze strany žáků
- jedná se o suplované hodiny, žáci mohou být méně koncentrovaní na svůj výkon
- úlohy nejsou hodnoceny, žáci mohou mít sníženou motivaci k práci
- pracuje se s celou třídou najednou, nelze zcela zabránit opisování
- kvůli získání co nejvíce informací je program výzkumu dlouhý, náročný na pozornost a koncentraci, někteří žáci mohou být unaveni

2.3 Průběh výzkumu

Pilotní výzkum byl proveden na Střední odborné škole stravování Říčany s.r.o., kde jsem učitelem matematiky, tělesné výchovy a informačních technologií. Hlavní výzkum byl proveden na Gymnáziu U Libeňského zámku v Praze. Na této škole jsem měl povinnou pedagogickou praxi z matematiky v roce 2014 u Mgr. Dany Vítové, která mi průzkum umožnila realizovat, i když nejsem zdejším stálým učitelem. Výzkum proběhl v květnu 2016 ve třídách 2.A, kde bylo přítomno 28 žáků, a 2.B, kde bylo přítomno bylo 31 žáků. V každé třídě jsem měl k dispozici pouze dvě vyučovací hodiny jdoucí po sobě. Tato skutečnost vedla k formulaci tolika úkolů (pracovní list, test, dotazník), abych měl co nejvíce informací, které lze analyzovat.

Výzkum probíhal intenzivně po krátký časový úsek v celé třídě pod vedením osoby, kterou žáci nikdy dříve neviděli. Proto jsem se rozhodl nepoužít k záznamu průběhu testování videotechniku, která by byla dalším rušivým elementem a mohla by negativně ovlivnit průběh a výsledky výzkumu.

2.3.1 Pilotní výzkum

Pilotní výzkum by proveden při suplované hodině na škole SOŠ stravování Říčany, v níž působím jako učitel matematiky, tělocviku a informačních technologií. Cílem bylo ověřit, zda jsou žáci schopni řešit úlohy zadané pomocí funkcionálních rovnic. Rozsah tohoto výzkumu byl výrazně menší, obsahoval pouze pilotní pracovní list s menším množstvím úloh. Výsledky nejsou zahrnuty v hodnocení hlavního výzkumu.

Dvěma žákům, kteří měli probranou pouze lineární funkci a základy umocňování, jsem vyložil logaritmy podle Briggse pomocí manipulace s funkcionálními rovnicemi (rozklady na součin). Žáci měli na základě pilotního pracovního listu (příloha 1) samostatnou prací odvodit pravidlo pro n-tou mocninu logaritmovaného čísla a vyjádřit vlastnost daného matematického konstruktu B(1) = 0. Po samostatné práci následovala diskuze a kontrola jednotlivých příkladů. Žáci samostatně odvodili pravidlo pro n-tou mocninu argumentu logaritmu, vlastnost B(1) = 0 jsme společně odvodili v rámci diskuze.

Ve druhé hodině jsem žákům vyložil, že se jedná o manipulaci s exponenty, a ukázal jsem, jak Briggs tvořil jednotlivé logaritmy různých čísel a jak s nimi následně pracoval. Na závěr jsem ukázal zavedení logaritmu pomocí inverze k exponenciální funkci. Jejich reakce: "To, co jste nám ukázal je snadno pochopitelné a dává to smysl, ale druhá definice je moc složitá." Reakce je přirozená, protože na rozdíl od žáků gymnázia v hlavním výzkumu neprošli tito žáci výukou exponenciálních ani mocninných funkcí. Zajímavý je ale fakt, že tito žáci, kteří na ZŠ patřili k podprůměrným, zvládli pochopit princip logaritmu a logaritmických tabulek.

Pilotním výzkumem bylo ověřeno, že funkcionální rovnice lze pro výzkum využít. Pracovní list se ukázal jako nedostatečný, proto byl doplněn o další úlohy.

Pilotní výzkum byl založen na dobrovolnosti a účastnili se ho nejschopnější žáci na matematiku v oboru kuchař – číšník, kteří k němu přistupovali hlavně z osobní prestiže. Dalším příznivým faktorem bylo, že se s žáky vzájemně dobře známe, vyučoval jsem je matematiku tři roky.

2.3.2 Výklad – Historická skupina

Celý výklad jsem si předem sepsal a snažil se daného scénáře držet po celý průběh obou hodin. V uvozovkách jsou zapsány přesné pasáže mého výkladu. Nejdříve jsem přestavil sebe a pak přestavil svůj výzkum: "Ve své diplomové práci se zabývám matematikou 17. století. To je doba, kdy matematický zápis vypadal úplně jinak, než ten, který používáme dnes. Je to doba ještě před Kartézskou soustavou. Objevil jsem zajímavý matematický konstrukt, který by mohl být přínosný pro dnešní výuku. Matematici se pokoušeli různými možnými i nemožnými způsoby zjednodušit práci s velkými čísly. Zkuste si každý sám vyřešit bez kalkulačky příklad:"

Příklad 1) Sečtěte a vynásobte čísla 1615 a 1624 bez použití kalkulačky.

```
  1615                 1615
+1624                  1624
  3239                 6460
                      3230
                     9690
                    1615
                    2622760
```

Na otázku, která z operací je jednoduší, žáci dle očekávání odpověděli, že sčítání.

"Seznámím vás s matematickým konstruktem, který byl vymyšlen roku 1615. Myšlenka byla zjednodušit práci s velkými čísly. Nešlo by převést násobení na sčítání?

B(1615 . 1624) = B(1615) + B(1624) = B(2622760) obecně to můžeme vyjádřit takto: B(a . b) = B(a) + B(b)

V okamžiku, kdy bychom znali B všech čísel například do 10^7, tak bychom mohli řešit násobení všech dvou, tří i čtyř ciferných čísel pouhým sčítáním a dohledáváním v tabulce. Nyní si vyzkoušíme, jestli je tato myšlenka realizovatelná."

Záměrně jsem místo slova funkce použil matematický konstrukt. Pracovní list jsem se snažil konstruovat tak, aby žáci mohli sami objevit, že vlastně počítají s logaritmy v průběhu samostatné práce.

Vzájemně jsme se s žáky neznali, snad i proto neměli žádné dotazy. Několikrát jsem se ujišťoval, zda chápou, co je jejich úkolem, a na základě jejich reakce (či spíše podle jejich výrazů ve tvářích) jsem základní myšlenku práce se vzorce ještě jednou vysvětlil. Pak jsem žákům sdělil základní instrukce:

"Nyní vám rozdám pracovní list. Na jehož základě byste měli být schopni rozhodnout, jestli je tato myšlenka převeditelná do praxe, nebo ne a mohli byste najít další souvislosti týkající se daného matematického prostředí."

Poté jsem rozdal vytištěný pracovní list, na jehož základě měli odvodit všechny věty o logaritmech. Nechal jsem je samostatně pracovat. Všechny úlohy měli hotovy za 25 minut.

Když jsem vybral pracovní listy, zeptal jsem se, zda nalezli souvislost s nějakou již probranou látkou. Přihlásil se pouze jediný žák, který na základě pracovního listu objevil, že se jedná o logaritmy. Většina třídy byla tímto zjištěním překvapena. Proto jsem na konci první hodiny, místo ukázky konstrukce matematických tabulek podle Briggse, zvolil opakování logaritmů (graf, věty o logaritmech), abych vyrovnal startovní pozici pro zvládnutí testu se skupinou, která bude od začátku seznámena, že se jedná o logaritmy.

Následovala přestávka a přešlo se k testu, který žáci zvládli napsat za 35 minut. V průběhu testu jsem obcházel mezi lavicemi, abych případně odpovídal na dotazy. Na závěr jsem rozdal dotazníky, na jejichž vyplnění stačilo 5 minut.

2.3.3 Výklad – Procvičovací skupina

Třídě jsem se představil a seznámil je s tématem svého výzkumu − logaritmem, který jsem uvedl historickými poznatky o logaritmu. Dále jsem žáky seznámil s průběhem celé dvouhodinovky. Žáci byli zaskočeni, že se můj výzkum týká logaritmů. Vyzval jsem je, aby mi řekli vše, co si pamatují o logaritmu, a já že budu vše zaznamenávat na tabuli. Žáci byli nejdříve překvapeni, ale postupně se začali rozpomínat. Čekal jsem na moment, kdy vysloví i větu o součtu logaritmů.

První dvě informace, které mi žáci nadiktovali:

1) "Logaritmem zjišťujeme mocninu čísla"

2) "Součet logaritmů je logaritmus součinu"

V tu chvíli jsem brainstorming zastavil a přešel k rozdávání pracovních listů a samostatné práci. Práce žákům opět trvala 25 minut. Většina žáků Procvičovací skupiny měla na první pohled s pracovním listem méně práce, než skupina Historická. V této skupině jsem nejprve zvolil kontrolu některých úloh z pracovního listu (log 144, log13, vyslovení zbylých vět o logaritmech) a následně dokončil opakování logaritmů včetně grafů. Připojil jsem několik informací z historie: první mechanický kalkulátor pracoval na základě logaritmu, logaritmus byl vymyšlen dříve než koncept funkce.

Na závěr první hodiny jsem žákům zadal složitější úlohu na logaritmus:

Určete reálná čísla a, b tak, aby pro funkci $h_1 : y = a \log_2 x + b$ platilo:

$h_1(4) = 5\,, h_1\left(\frac{1}{4}\right) = -7$ (Petáková, str.32/76).

S daným příkladem si žáci nevěděli rady a nakonec jsem ho musel vyřešit sám. Po přestávce následoval test a dotazník jako v Historické skupině.

2.4 Pracovní list

Komentované zadání pracovního listu

Pracovní list je rozdělen na dvě na sebe navazující části. Prvotní myšlenka byla, že po vypracování prvního listu se udělá krátké shrnutí a pak budou žáci samostatně vypracovávat druhý pracovní list. Od toho nápadu jsem ustoupil, aby byl vstup vyučujícího do práce žáků co nejmenší a byla zachována co největší objektivita. Rozdělení pracovního listu bylo zachováno pro účely dotazníku Historické skupiny.

Vždy nejdříve uvedu zadání úlohy pro žáky, kteří řešili logaritmus jako obecný historický konstrukt, a následně zadání pro žáky, kteří opakovali logaritmus.

Pracovní list 1

1) Jakému B odpovídají následující součty

a. *B(3) + B(5) =*

b. *B(9) + B(7) =*

c. *B(1) + B(1) =*

1) Jakému logaritmu odpovídají následující součty

a. $log_{\frac{1}{3}} 3 + log_{\frac{1}{3}} 5 =$

b. $log_5 9 + log_5 7 =$

c. $log_7 1 + log_7 1 =$

Žáci měli pouze aplikovat zadaný vzorec o součtu logaritmů. Úloha byla zadána tak, aby v případě nejasností mohl vyučující znovu objasnit zkoumanou problematiku způsobem, který nenaruší další průběh samostatné práce. Příklad *c* je z celé úlohy nejdůležitější. Výraz B(1), respektive *log* 1, se objevuje v dalších úlohách. Skutečnost, že logaritmus zobrazuje neutrální prvek násobení na neutrální prvek sčítání je zcela stěžejní vlastnost, kterou by si žáci měli uvědomit.

2) Dané B vyjádřete pomocí definice. Vypište více možností, jestli je to možné.

a. B(24) =

b. B(13) =

c. B(32) =

d. B(12^2) =

2) Dané logaritmy vyjádřete pomocí vět o součtu logaritmů. *Vypište více možností, jestli je to možné.*

a. $log_3 24 =$

b. $log_9 13 =$

c. $log_2 32 =$

b. $log_8 12^2 =$

Žáci měli převést prvočíselný rozklad jednotlivých čísel na součet dvou či více logaritmů. Zajímalo mě, jak si poradí s prvočíslem (příklad *b*), nebo jestli budou schopni transformovat mocninu, jako vnitřní funkci argumentu jako násobek funkce vnější (příklady *c*, *d*). Skupina opakující logaritmy navíc mohla některé výrazy vyčíslit.

Pracovní list 2

3) Doplňte chybějící člen

a. B(39) = B(13) +

b. B(56) = B(7) +

c. B(36) – B(3) =

3) Doplňte chybějící člen

a. $log\, 39 = log\, 13 +$

b. $log_6 56 = log_6 7 +$

c. $log_{12} 36 - log_{12} 3 =$

Úloha 3 je v podstatě stejná jako úloha 1. Zde žáci nedoplňují součet, ale jeden ze sčítanců. Prvními dvěma příklady si žáci mají ověřit ekvivalenci zadané definice (věty). Poslední příklad je aplikací poznatku, že stejně jak existuje vztah mezi sčítáním a násobením, tak existuje i vztah mezi dělením a odčítáním.

4) *Vyjádřete dané B*

a. $B\left(\frac{51}{3}\right) =$

b. $B\left(\frac{5}{3}\right) =$

c. $B\left(\frac{1}{10}\right) =$

4) *Vyjádřete daný logaritmus*

a) $log_4\left(\frac{51}{3}\right) =$

b) $log_5\left(\frac{5}{3}\right) =$

c) $log\left(\frac{1}{10}\right) =$

Návaznost jednotlivých úloh odpovídá výuce zavádění pravidel pro práci s mocninami. Žáci úlohou 4 přechází od přirozených argumentů logaritmu k argumentům racionálním. Mají použít poznatek, který si ověřili v úloze 3, že pro logaritmy také platí funkční závislost mezi dělením a odčítáním. Hlavně skupina pracující s obecnou funkcí B si má uvědomit, že platí-li vztah mezi násobením a sčítáním, musí existovat i vztah mezi dělením a odčítám jakožto inverzními operacemi vzhledem k vzorci zadanému v úvodu hodiny.

V příkladu *a* bude zajímavé pozorovat, jestli vykrácení argumentu bude závislé na skupině, ve které logaritmy procvičují. Pro skupinu opakující logaritmus jsou základy příkladů *b, c* zvoleny tak, aby mohly výrazy částečně vyčíslit.

5) *Vyjádřete jedním B*

a. $B(\sqrt{2}) + B(\sqrt{2}) =$

b. $B(\sqrt[3]{5}) + B(\sqrt[3]{5}) + B(\sqrt[3]{5}) =$

c. $\frac{B(10)}{2} + \frac{B(10)}{2} =$

d. $\frac{B(5)}{2} + \frac{B(5)}{3} =$

5) *Vyjádřete jedním logaritmem*

a. $log\,\sqrt{2} + log\,\sqrt{2} =$

b. $log_5\,\sqrt[3]{5} + log_5\,\sqrt[3]{5} + log_5\,\sqrt[3]{5} =$

c. $\frac{log_7 10}{2} + \frac{log_7 10}{2} =$

d. $\frac{log_{11} 5}{2} + \frac{log_{11} 5}{3} =$

V úloze 5 žáci pracovali s racionálními mocninami argumentu. Předpokládal jsem, že si v rámci úlohy 2 vybavili, nebo odvodili, pravidlo pro práci s mocninami. První dva příklady mají mocninu v rámci argumentu funkce, následující dva příklady mají mocninu vytknutou vně v rámci vnější funkce.

6) *Vyjádřete*

a. *B(1) =*

b. *B*(10^n) =

c. $B\left(\sqrt[n]{10}\right) =$

6) *Vyjádřete;* $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$*;* $n \in N$

a. $log_a 1 =$

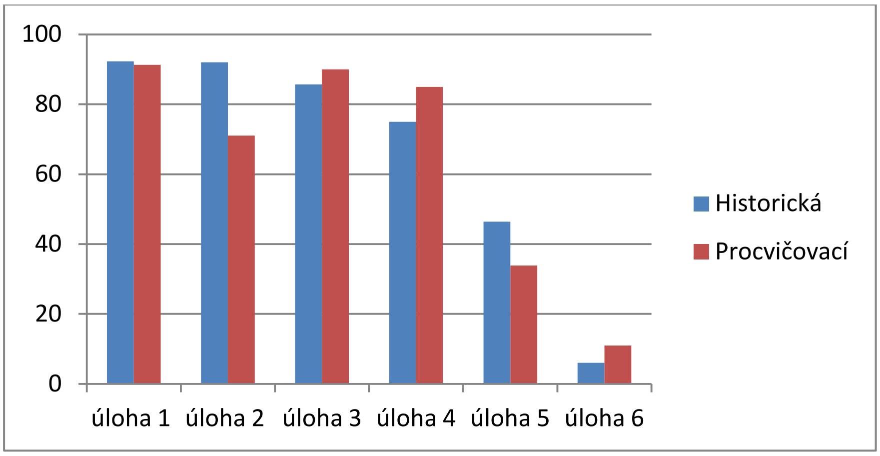
b. $log\, 10^n =$

c. $log\,\sqrt[n]{10} =$

V poslední úloze pracovního listu měli žáci obecně vyjádřit nejdůležitější věty o počítání s logaritmy. Záměrně jsem zde neuvedl $B\left(\frac{b}{c}\right)$, respektive $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$, protože logicky vyplývá z úvodního vzorce. Pracovní list směřuje hlavně k těmto třem výrazům. U skupiny opakující logaritmus jsem udělal chybu, všechny výrazy měly obsahovat obecný základ a. Na výpovědní hodnotě této úlohy to však nic nemění.

2.4.1 Analýza pracovního listu

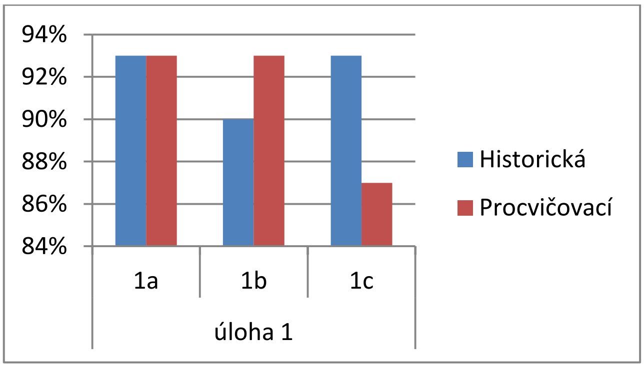
Pracovní list obsahuje dvacet příkladů rozdělených do šesti úloh. Graf 1 porovnává procentuelní úspěšnost jednotlivých skupin v jednotlivých úlohách.



graf 1: Úspěšnost pracovního listu

Obě skupiny měly výsledky srovnatelné. Hodnotil jsem pouze správnost řešení, jak je pospáno v kapitole Vyhodnocení dat. Průměrná úspěšnost Historické skupiny je třináct správných příkladů. Procvičovací skupina má průměrnou úspěšnost dvanáct správných příkladů. Nyní hlouběji analyzujeme jednotlivé úlohy.

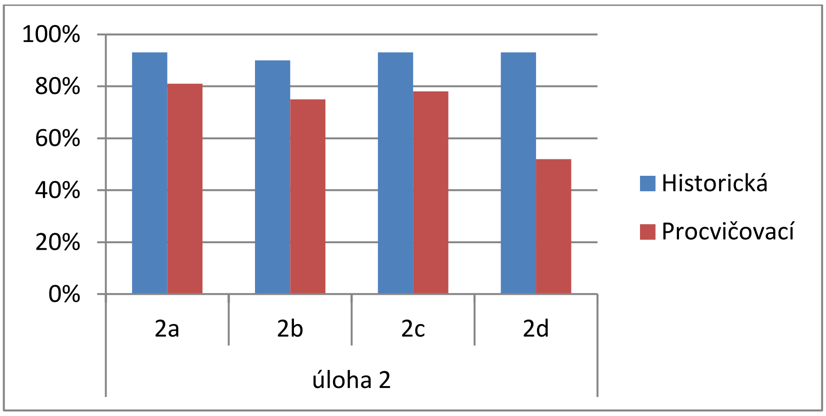
Procentuální úspěšnost jednotlivých příkladů úlohy 1 ukazuje graf 2.



graf 2: Úspěšnost úlohy 1

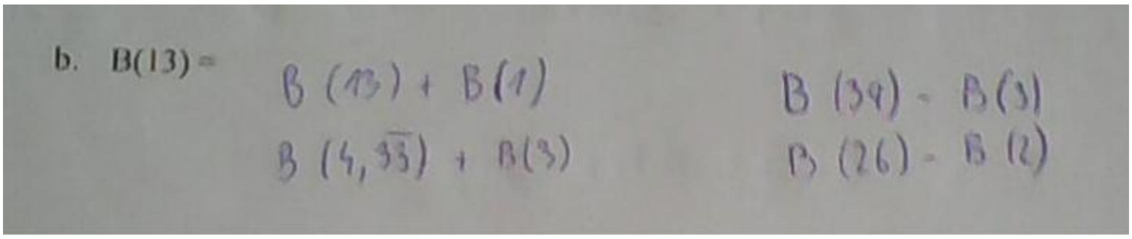
Rozdíl úspěšnosti v příkladu *b* byl zapříčiněn chybou v malé násobilce. Princip řešení byl správný. Pouze jeden žák z každé skupiny vůbec nepochopil zadání a z celého pracovního listu získal nula bodů. Jeden žák Historické skupiny napsal k jednotlivým příkladům dvě, jak součin argumentů, tak i součet argumentů. Tuto odpověď jsem hodnotil jako špatnou. Tento žák měl úlohu 2 správně. Největší rozdíl vidíme v příkladu *c*, kdy dva žáci Procvičovací skupiny, po správném splnění prvních dvou příkladů, argument sečetli. V Historické skupině tato situace nenastala.

Úloha 2 měla dát žákům prostor pro kreativitu jednotlivých rozkladů. Graf 2 ukazuje procentuální úspěšnost žáků v jednotlivých úlohách.



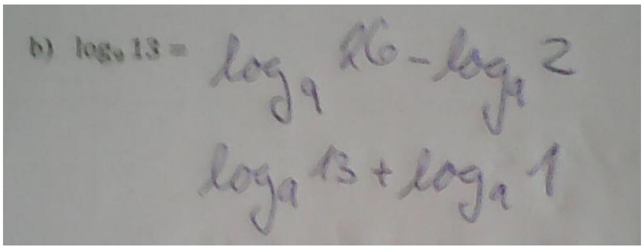
graf 3: Úspěšnost úlohy 2

Ve všech příkladech úlohy byla úspěšnější Historická skupina, která měla průměrně více rozkladů a práce byla více systematická. Rozdíly skupin jsou vyrovnané kromě příkladu *d* ($\mathrm{B}(12^2), \mathrm{resp.} \log_8 12^2$). Tento příklad obsahoval mocninu argumentu, což se ukázalo jako neřešitelný problém pro téměř celou polovinu žáků Procvičovací skupiny. Předpokládané problémy s příkladem *b* (B(13) resp. $\log_9 13$) nenastaly. Nyní si ukážeme některá žákovská řešení.



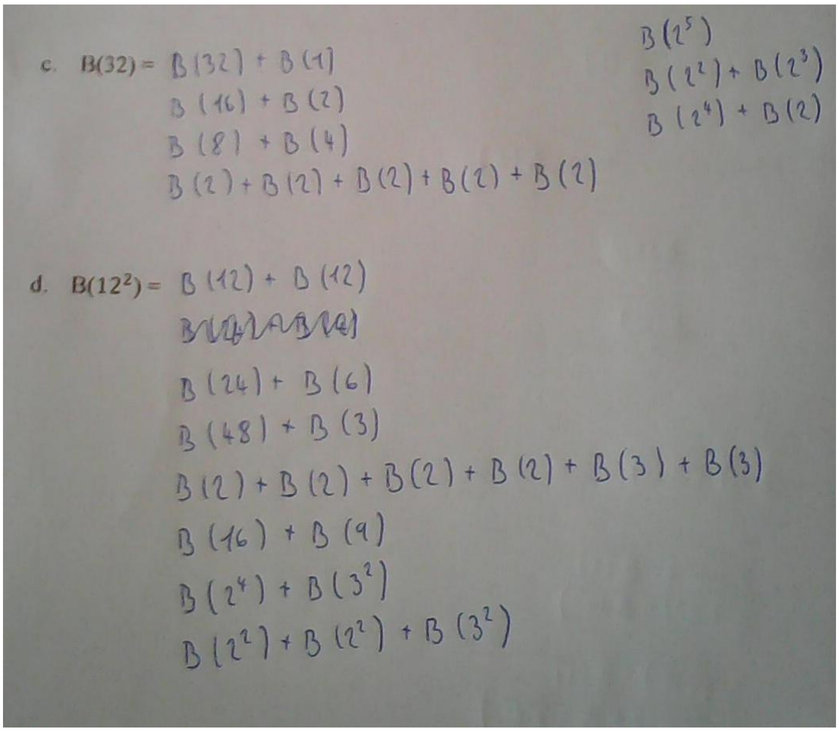
Obrázek 2:2.1 Rozklad prvočísla-Historická skupina

Na obrázku 2 je vidět systematická práce v novém prostředí. První sloupec řešení ukazuje snahu o co nejlepší splnění úkolu na základě zadaného vzorce. Druhý sloupec je pravděpodobně přispán až po vypracování úlohy 3. Řešení na základě dělení číslem třináct je četnější u Historické skupiny, ale objevuje se i ve skupině druhé.



Obrázek 3: 2.2Rozklad prvočísla – Procvičovací skupina

Na obrázku 3 je vidět, že díky předchozí znalosti žák nejdříve využil dělení a později připsal i násobení číslem jedna.



c. $B(32) = B(32) + B(1)$

$B(16) + B(2)$

$B(8) + B(4)$

$B(2) + B(2) + B(2) + B(2) + B(2)$

$B(2^5)$

$B(2^2) + B(2^3)$

$B(2^4) + B(2)$

d. $B(12^2) = B(12) + B(12)$

$B(24) + B(6)$

$B(48) + B(3)$

$B(2) + B(2) + B(2) + B(2) + B(3) + B(3)$

$B(16) + B(9)$

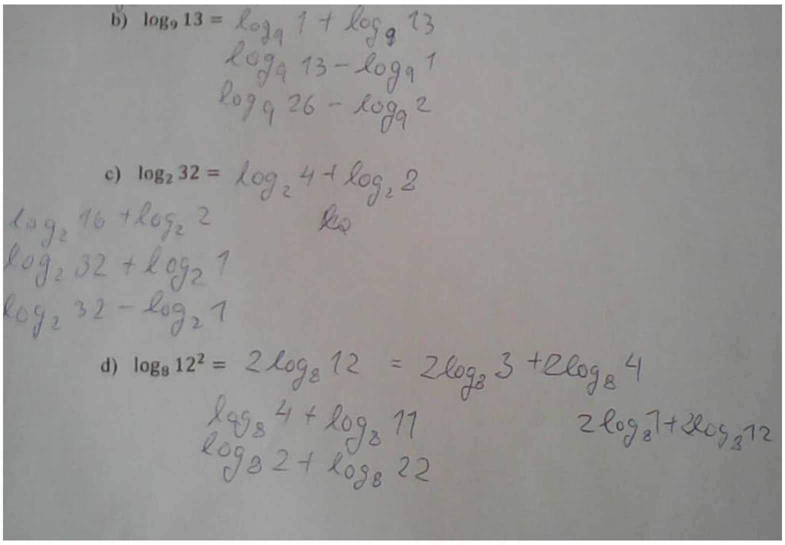
$B(2^4) + B(3^2)$

$B(2^2) + B(2^2) + B(3^2)$

Obrázek 4:2.3 Prac.list správné dosazení – Historická skupina

Na obrázku 4 vidíme, že někteří žáci Historické skupiny byli blízko vlastnímu odvození věty o mocnině argumentu logaritmu. Předpokládal jsem, že tuto větu odvodí a budou ji využívat. To se nepotvrdilo, ale někteří si ji vybavili a uvedli v poslední úloze.

V Procvičovací skupině několik žáků s touto větou pracovalo. Jak je však vidět na obrázku 5. Tento žák si nebyli jejím správným použitím jisti a při pokusu o další rozklady s ní manipulovali špatně.



b) $\log_9 13 = \log_9 1 + \log_9 13$

$\log_9 13 - \log_9 1$

$\log_9 26 - \log_9 2$

c) $\log_2 32 = \log_2 4 + \log_2 8$

$\log_2 16 + \log_2 2$

$\log_2 32 + \log_2 1$

$\log_2 32 - \log_2 1$

d) $\log_8 12^2 = 2\log_8 12 = 2\log_8 3 + 2\log_8 4$

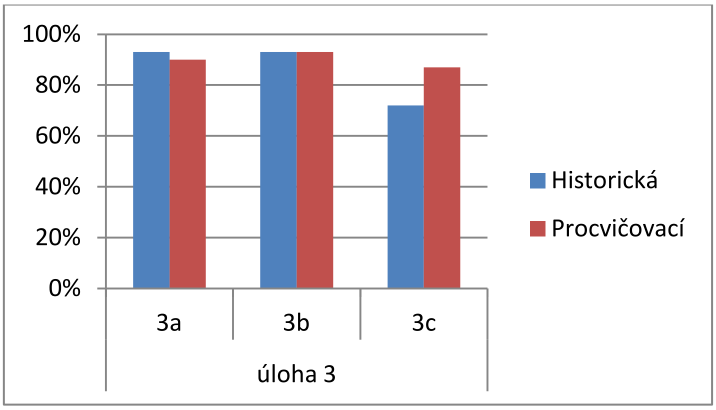
$\log_8 4 + \log_8 11$

$\log_8 2 + \log_8 22$

$2\log_8 1 + 2\log_8 12$

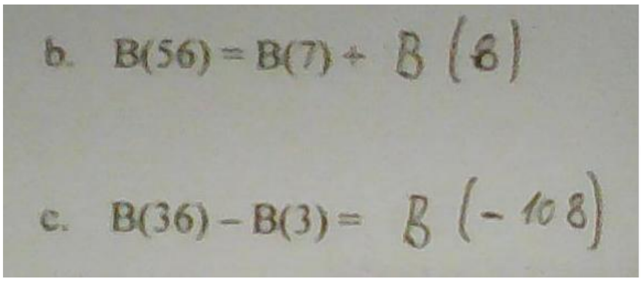
Obrázek 5: 2.4 Prac. list chyba úlohy 2 – Procvičovací skupina

Některé odevzdané pracovní listy obsahovaly chyby v malé násobilce. To je jedna z příčin rozdílu v úspěšnosti v úloze 3. Graf 4 nám ukazuje, že správnost řešení jednotlivých příkladů je velmi vyrovnaná, lehkou převahou Procvičovací skupiny.



graf 4: Úspěšnost úlohy 3

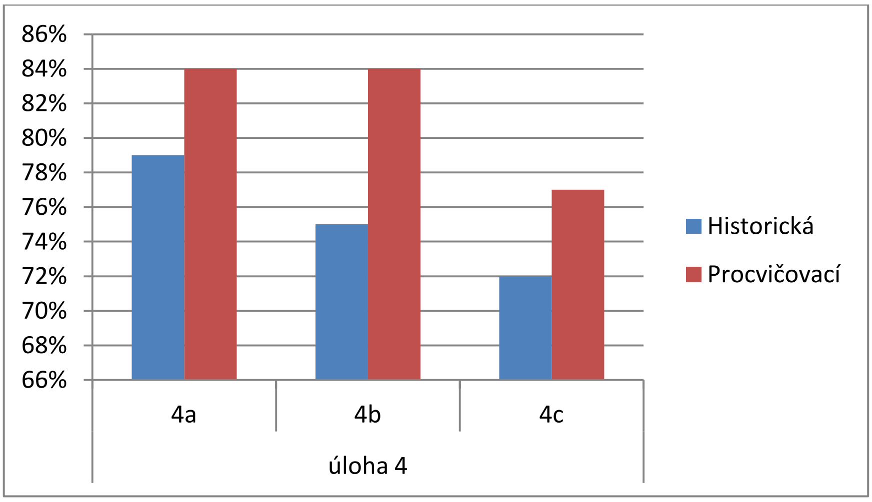
V Historické skupině se u třech žáků vyskytly chyby spojené s vytýkáním mezi argumentem funkce a vnější funkcí, jak ukazuje obrázek 6.



Obrázek 6: 2.5 Úloha 3 – Historická skupina

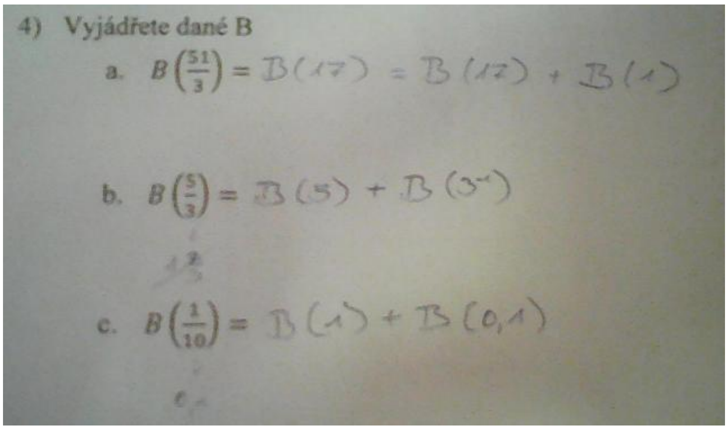
Obecné zadání funkcionálních rovnic je závislé na definičním oboru. Vzhledem ke konkrétnosti příkladů pracovního listu jsem definiční obor neuváděl. Řešení na obrázku poukazuje na potřebu některých žáků čistě formálně dodržovat předložený předpis. Aby žák mohl použít zadaný předpis, přesunul záporné znaménko k argumentu funkce a s funkcemi pracoval, jak bylo definováno na začátku hodiny.

Úloha 4 již vyžaduje hlubší porozumění. Jednalo by se o vrchol celého pracovního listu, kterého lze za jednu hodinu dosáhnout se žáky, kteří nemají s logaritmem žádné zkušenosti. To se potvrdilo větší úspěšností Procvičovací skupiny. Žáci Historické skupiny, kteří nezjistili, že matematický konstrukt je logaritmus, museli sami odvodit pravidlo pro práci s racionálním argumentem. Graf 5 ukazuje procentuální úspěšnost v jednotlivých příkladech.



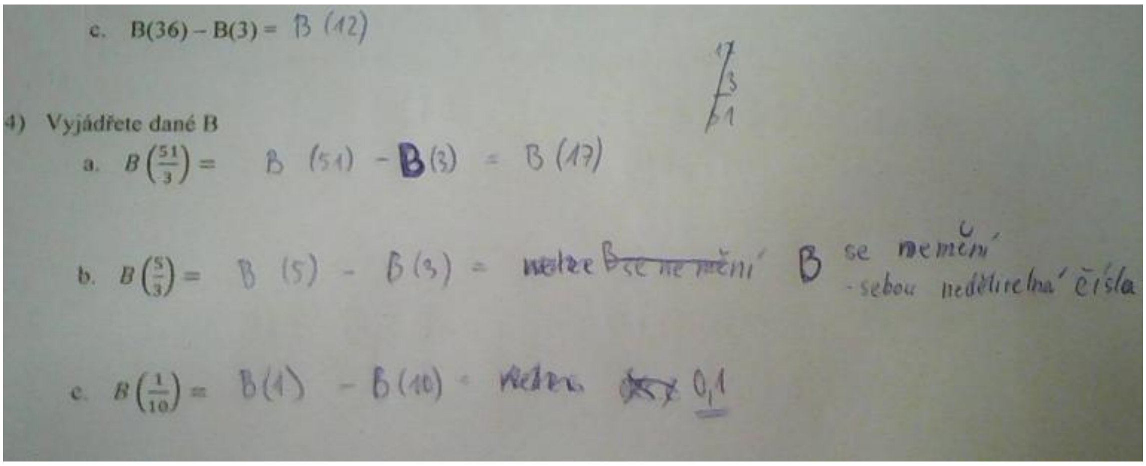
graf 5: Úspěšnost úlohy 4

Z grafu je vidět, že ve všech příkladech byla úspěšnější Procvičovací skupina. V příkladu *a* bylo možné upravit argument funkce, čímž byl příklad také vyřešen. Tuto možnost zvolilo 28% žáků z Historické skupiny, což je třetina všech úspěšných řešitelů, avšak v Procvičovací skupině toho využila pouze jedna žačka, což odpovídá 3%. Ukážeme si některá žákovská řešení.



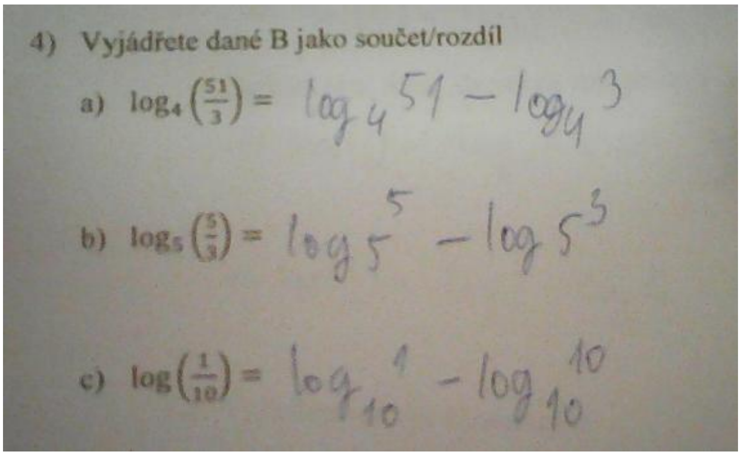
Obrázek 7: 2.6 Úloha 4 – Historická skupina

Na obrázku 7 je originální řešení žáka Historické skupiny. Toto řešení je unikátní tím, jak se žák snažil vypořádat se zlomkem pomocí záporné mocniny. Na základě ukázky můžeme říct, že v průběhu pracovního listu nepoznal logaritmy, ale velmi dobře přijal prostředí konkrétních funkcionálních rovnic. I s příkladem c se vyrovnal správně a vzhledem k zadání příklad splnil. Tento postup jsem při tvorbě pracovního listu neočekával.



Obrázek 8: 2.7 Úloha 4 – Historická skupina

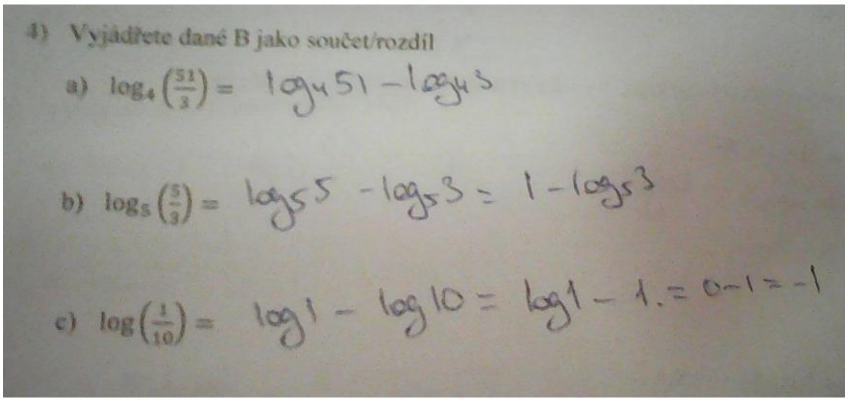
Na obrázku 8 vidíme, že žák se nějakým způsobem snažil vypořádat s nevyčíslitelností příkladů pracovního listu, jak je vidět na řešení příkladu c. Vzhledem ke komentářům, které k příkladu napsal, můžeme také říct, že nerozpoznal v jednotlivých příkladech logaritmy. To potvrdil i odpovědí v dotazníku. Tato úloha neumožňovala Historické skupině více možností správného řešení.



Obrázek 9: 2.8 Úloha 4 – Procvičovací skupina

Obrázek 9 je ukázkou většiny správných řešení Procvičovací skupiny. Předpokládal jsem, že si žáci této skupiny v průběhu samostatné práce vybaví skutečnost, že $\log_a 1 = 0\,, a \in (0;1) \cup (1;\infty)$. To můžeme pozorovat u velmi malého procenta žáků Procvičovací skupiny (3%), v Historické skupině s tímto vztahem nepracoval nikdo.

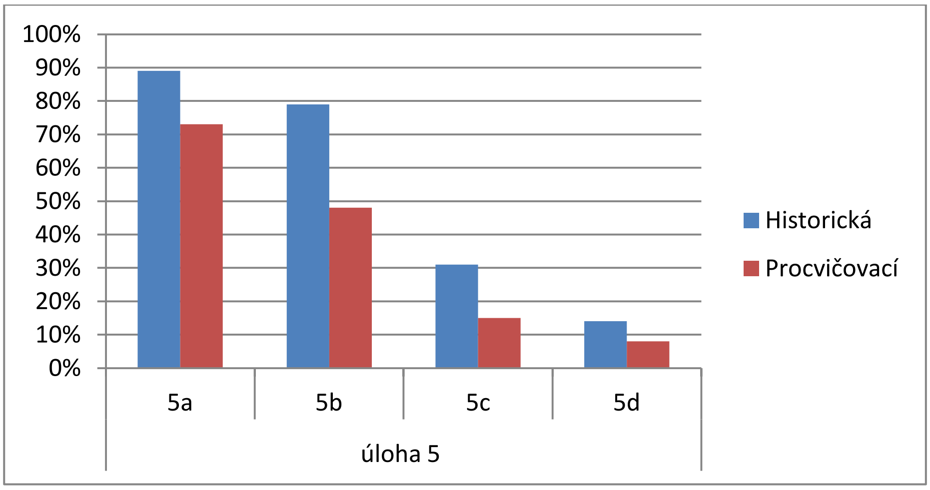
Procvičovací skupina mohla u této úlohy některé příklady částečně vyčíslit. To využili pouze dva žáci z celé třídy.



Obrázek 10: 2.9 Úloha 4 – Procvičovací skupina

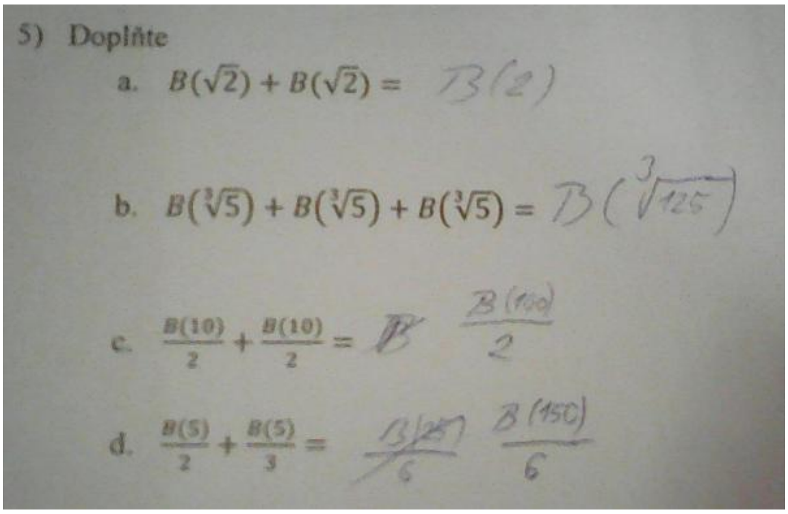
Obrázek 10 je ukázkové řešení. Předpokládal jsem, že takovéto řešení bude mít většina žáků, kteří úlohu splní. K tomu řešení dospěl pouze jediný žák Procvičovací skupiny.

V úloze 5 bylo cílem žákům ukázat souvislost mezi odmocninou argumentu a zlomkem logaritmické funkce. Vzhledem k omezenému času, který jsem na výzkum získal, je úloha zkrácena na nejmenší možný rozsah. První dva příklady (*5a, 5b)* obsahovaly odmocninu argumentu. Řešením další dvou příkladů (*5c, 5d*) bylo sečtení zlomkových částí logaritmů o stejném základu a se stejným argumentem. Graf 6 ukazuje procentuelní úspěšnost v jednotlivých příkladech.



graf 6: Úspěšnost úlohy 5

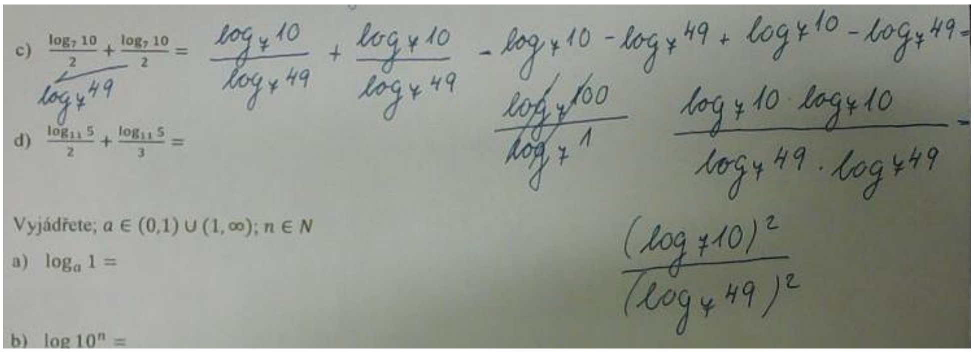
Ukážeme si některá žákovská řešení, která poodhalují možné příčiny rozdílné úspěšnosti v jednotlivých příkladech.



Obrázek 11: 2.10 Úloha 5 – Historická skupina

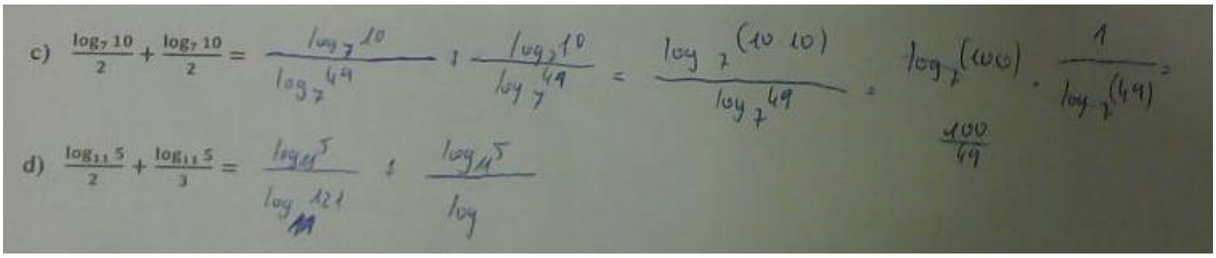
Na obrázku 11 je jedno z možných řešení příkladu c, které se častěji objevilo v Historické skupině, ale můžeme ho nalézt i ve skupině Procvičovací. Žák se více soustředil na zadaný vzorec o součtu logaritmů a nenapadlo ho zlomky sečíst. Formálně postupoval zcela správně a úlohu vyřešil.

Řešení příkladu d nám poodhaluje myšlení žáků. Podívejme se nejprve na škrtnutou část příkladu d, $B\left(\frac{25}{6}\right)$, která ukazuje častou chybu Historické skupiny. Chyba se dá vysvětlit tím, že žáci nevěděli, která operace má přednost, a protože sčítání funkcí B znamená násobení, tak zlomky místo sečtení vynásobili včetně argumentů funkce B. Opravená část je sice také špatně, ale poukazuje na hlubší porozumění procvičovaného tématu. Žák místo umocnění argument funkce pouze vynásobil. Toto vyjádření se vyskytlo pouze v tomto případě. Následující ukázky jsou z Procvičovací skupiny



Obrázek 12: 2.11 Úloha 5 – Procvičovací skupina

Na obrázku 12 je vidět chybu, která se vyskytla u 16 % žáků Procvičovací skupiny. Žák se snaží použít své znalosti o logaritmu za každou cenu a příklad si na začátku stíží vyjádřením dvojky pomocí logaritmu sedmi. Soustředění na předpis bylo tak silné, že nerozpoznal jednoduchý součet zlomků. Procentuální výskyt této chyby odpovídá rozdílu úspěšnosti mezi oběma skupinami.



Obrázek 13: 2.12 Úloha 5 – Procvičovací skupina

Obrázek 13 ukazuje stejnou chybu, v tomto případě ještě aplikovanou i v příkladu *d*.

Úloha 6 patřila mezi nejobtížnější. Vzhledem k minimální úspěšnosti neukazujeme procentuální úspěšnost pomocí grafu, ale výsledky pouze popíšeme.

Úloha vyžadovala od žáků obecné zapsání zkoumaných jevů. Celý pracovní list byl zaměřen na odvození zbylých vět o logaritmech, ale časové omezení jedné vyučovací hodiny neumožnilo dostatečně procvičit dané téma. Na zvládnutí tohoto úkolu si žáci museli vybavit informace, které se dozvěděli o dva měsíce dříve při výuce logaritmu. Přesto jsem předpokládal, že odvodí alespoň příklad a, B(1) = respektive $\log_a 1 = 0$, protože se tento výraz vyskytoval hned ve třech předchozích úlohách. Z Historické skupiny tento příklad vyřešil pouze jeden žák. V Procvičovací skupině pouze dva. Obdobně dopadly i zbylé příklady úlohy. Většina pracovních listů neměla tuto úlohu vyplněnou.

Celý pracovní list byl postaven na induktivním přístupu k dané problematice a předpokládal jsem, že většina žáků dosáhne v úloze 6 lepších výsledků, než dosáhli žáci v pilotním výzkumu. Tento předpoklad se nesplnit. Příčina může také spočívat v tom, že jejich kmenové učitelky matematiky používají spíše deduktivní způsob výuky.

2.5 Test

Komentované zadání testu

Nejdříve uvedu zadání testu, které následně okomentuji.

1. *Tabulka určuje hodnoty logaritmů s přesností na 2 desetinná čísla*

x	log x	x	log x
1	0,00	**11**	1,04
2	0,30	**12**	1,07
3	0,47	**13**	1,11
4	0,60	**14**	1,14
5	0,70	**15**	1,17
6	0,77	**16**	1,20
7	0,84	**17**	1,23
8	0,90	**18**	1,24
9	0,94	**19**	1,27
10	1,00	**20**	1,30

   a. *Ověřte platnost tabulky tak, že spočítáte log (18) několika různými způsoby*
   log (18) =

   b. *Bez použití kalkulačky spočtěte*
      i. $log\ (21) =$
      ii. $log\left(\frac{56}{5}\right) =$
      iii. $log\left(\sqrt[2]{\frac{51}{2}}\right) =$

Cílem bylo ověřit, jak jsou žáci schopni využívat logaritmus jako nástroj pro numerické počítání. Jedná se aplikaci znalostí pracovního listu, kde žáci pracovali s obecnou představou funkční hodnoty logaritmu a příklady nevyčíslovali. Nyní se jedná o využití teoretických znalostí z první fáze výzkumu s konkrétními funkčními hodnotami. Tabulka logaritmů je zjednodušena vyčíslením na pouhé dvě desetinná místa, aby její aplikaci nebránily složité výpočty.

V části *a* bude zajímavé pozorovat, jaké rozklady čísla 18 žáci použijí. Část *b* je zaměřena pouze na numerické počítání. V příkladech části *b* žáci musí projevit schopnost použít své teoretické znalosti pro hledání hodnot mimo zadanou tabulku pomocí rozkladů na prvočísla.

Úloha se nevyskytuje v žádných učebnicích ani sbírkách úloh z matematiky. Autor ji vytvořil sám na základě historických poznatků o tvorbě Briggsových tabulek. Jednotlivé hodnoty jsou spočítány ručně pomocí odmocnin z deseti až do hodnoty $\sqrt[1024]{10}$, jak je popsáno v kapitole "Aritmetický přístup k logaritmu a vznik logaritmických tabulek". Hodnoty jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa jednak proto, aby numerická manipulace nebyla pro žáky příliš náročná, jednak z důvodu přesnosti, a také, že uvedená metoda bez použití lineární interpolace větší přesnost neumožňuje.

Zadání úlohy lze využít pro formulací dalších příkladů. Za zajímavé považuji příklady s využitím další tabulky odmocnin základu logaritmu, kde si žáci vyzkouší vlastní tvorbu jednotlivých logaritmů, například:

- Pomocí tabulky s odmocninami z deseti spočtěte $\log(21)$ a výsledek ověřte pomocí tabulky logaritmů.
- Spočtěte $\log_5 2$.

Správné řešení:

a. $\log 18 = 1{,}24 = \log 2 + \log 9 = 0{,}30 + 0{,}94 = \log 3 + \log 6 = 0{,}47 + 0{,}77$

b. i. $\log 21 = \log 3 + \log 7 = 0{,}47 + 0{,}84 = 1{,}31$

ii. $\log\left(\frac{56}{5}\right) = \log 7 + \log 8 - \log 5 = 0{,}84 + 0{,}90 - 0{,}70 = 1{,}04$

iii. $\log\left(\sqrt[2]{\frac{51}{2}}\right) = \frac{\log 17 + \log 3 - \log 2}{2} = \frac{1{,}23 + 0{,}47 - 0{,}30}{2} = 0{,}7$

2. *Funkce je dána předpisem* $f(x) = log_{0,85}\, x$
   a. *určete definiční obor a načrtněte graf funkce*
   b. *Automobil ztrácí hodnotu každý rok o 15%.*
      i. *Určete hodnotu auta za 2 roky*
      ii. *Určete dobu (v letech), kdy bude cena poloviční.*

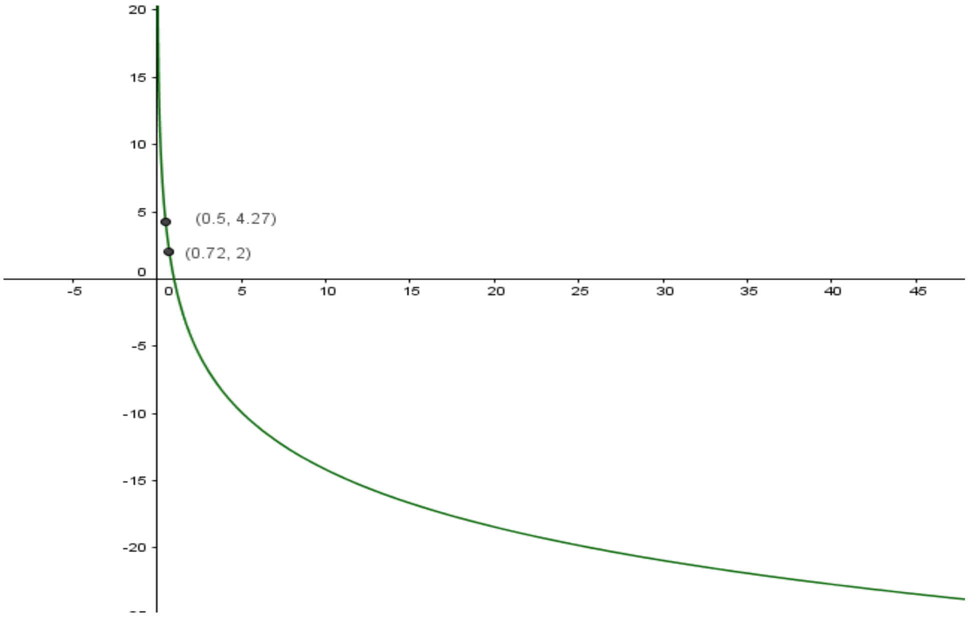
Na první pohled spolu příklad *a* a příklady *bi, bii* nesouvisí. Prvotní myšlenka byla propojit první příklad s dalšími dvěma tak, že by žáci do zakresleného grafu příkladu *a* graficky znázornili spočtené řešení zbylých příkladů úlohy. Od této myšlenky jsem upustil, protože někteří žáci mohou mít problémy se zakreslením grafu. Rozhodl jsem se nepropojovat graf funkce s řešením zbylých příkladů úlohy.

V prvním příkladu mě zajímalo, jak budou žáci tvořit graf a znají-li definiční obor logaritmické funkce. Jestli použijí tabulku pro tvorbu grafu, nebo jestli se pouze pokusí vybavit si graf funkce dané předpisem.

Pro další dva příklady jsou záměrně použity malé hodnoty, aby žáci mohli využít buď diskrétní, nebo funkční přístup. Obával jsem se, že při vyšších hodnotách žáci úlohu nezvládnou a nebude mít v rámci výzkumu žádnou výpovědní hodnotu. Předpokládal jsem, že příklad *a* bude nápovědou pro další dva příklady. Úloha vychází z reálné situace, která se pro vyšší hodnoty dá řešit pouze logaritmem.

V žádné učebnici zabývající se logaritmy se takováto úloha nevyskytuje. Jedná se o upravený příklad z internetové stránky http://www.hackmath.net/cz/slovni-ulohy/logaritmy, který jsem zjednodušil, aby vznikla i možnost diskrétního řešení.

Grafické řešení celé úlohy vytvořené v programu geogebra:



Obrázek 14

Obrázek 14 je řešením příkladu *a*, které je doplněno grafickým řešením příkladů *bi*, *bii* v programu geogebra. Hodnota auta se pohybuje na ose *x* v intervalu (0; 1) a stáří auta se pohybuje v letech na ose *y*.

Numerické řešení příkladů b:

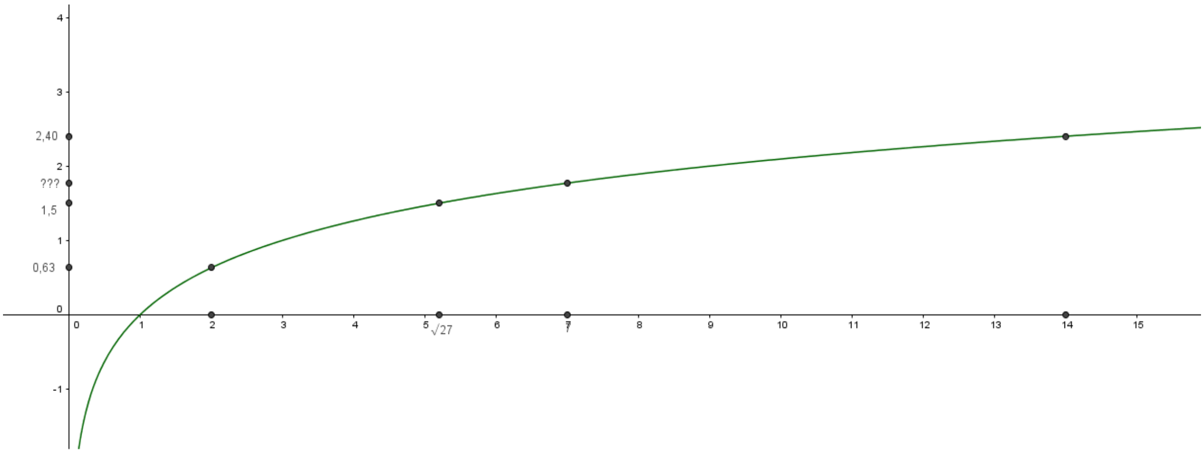
i. Diskrétně: pomocí postupného počítání procent

   Funkčně: $x = \left(1 - \frac{15}{100}\right)^2 = (0{,}85)^2 = 0{,}7225$

ii. $0{,}5 = (0{,}85)^y$

   $y = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}85)} \cong 4{,}27$

3. *Na obrázku je graf logaritmické funkce.*



a. *Najděte funkční hodnotu* $f(7)$
b. *Zjistěte základ logaritmu a napište předpis funkce*

Úlohu jsem vytvořil sám na základě historické definice, kdy jsou teoretické znalosti logaritmu propojené s grafem logaritmické funkce. Použitím standardní středoškolské definice je velmi náročné uvědomit si, že součin hodnot na ose *x* se rovná součtu odpovídajících hodnot na ose y. Předpokládal jsem, že první část úlohy nebude dělat žákům problémy, protože se jedná pouze o grafickou podobu úlohy 3 pracovního listu.

Druhý příklad úlohy je náročnější. Přepokládal jsem, že ho vyřeší 40% všech respondentů. Jako nápovědu jsem vložil do grafu funkční hodnotu mocniny základu $\left(f(x)\colon \log_a \sqrt[2]{27} = 1{,}5\right)$.

Správné řešení:

a. $f(14) = 2{,}40$; $f(2) = 0{,}63$

$f(7) = f(14) - f(2) = 2{,}40 - 0{,}63 = 1{,}77$

b. $f\left(\sqrt[2]{27}\right) = 1{,}5$

$3^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \rightarrow a = 3$

4. *Jitka se v 8 hodin dozvěděla, že všech 729 žáků školy půjde do kina. Během 20 min. to řekla 3 kamarádům. Každý z nich to opět za 20 min. řekl dalším třem. Tímto způsobem se zpráva šířila dál. V kolik hodin se ji dozvěděly všechny děti ve škole?*

V úloze se pracuje se součtem členů geometrické posloupnosti. Žáci danou problematiku neznají, ale zajímá mě, jak budou k úloze přistupovat. Je opět převzata z internetové stránky http://www.hackmath.net/cz/slovni-ulohy/logaritmy. Úloha je do testu vložena hlavně pro nadanější žáky.

Rozhodl jsem se jako počet žáků školy zadat takové číslo, které je mocninou trojky. Jak veliký signál to bude pro žáky? Jak se vypořádají s problémem, kam a jak započítat Jitku?

Správné řešení:

$$s_n = a_1 \, . \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$729 = 1 \, . \frac{1-3^n}{1-3}$$

$$-1458 = 1 - 3^n$$

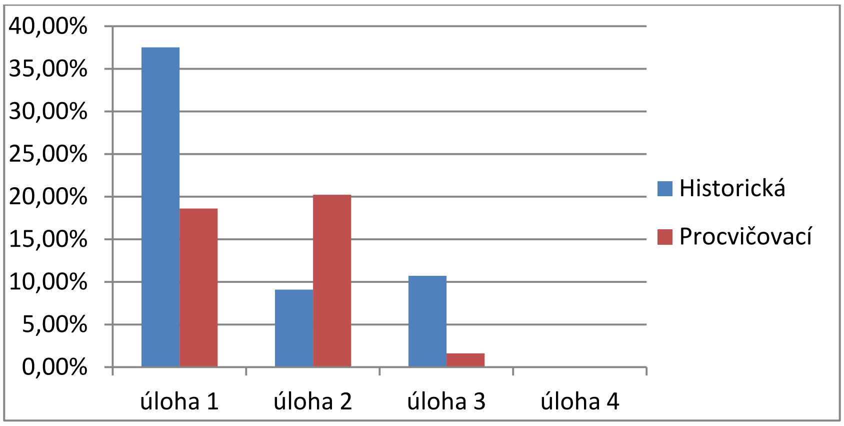
$$n = \frac{\log 1459}{\log 3} \cong 6{,}63$$

Výsledné *n* je počet prvních členů geometrické posloupnosti, jejichž sečtením získám celkový počet žáků školy. Výsledný čas získám vynásobením tohoto výsledku dvaceti minutami.

Odpověď: Všechny děti se informaci dozvěděly za 2 hodiny a 12,6 minuty, to znamená v 10 hodin a 12,6 minuty.

2.5.1 Analýza testu

Test byl navržen tak, aby alespoň jeden příklad každé úlohy, kromě úlohy 4, zvládl každý. Úloha 4 skrývala pod situací běžného života látku, se kterou se žáci ještě nesetkali. Graf 7 ukazuje procentuální úspěšnost v jednotlivých úlohách testu.



graf 7: Úspěšnost test

Očekával jsem, že průměrná úspěšnost v jednotlivých úlohách bude mezi čtyřiceti a šedesáti procenty a úlohu 4 vyřeší alespoň jeden žák z každé skupiny. Reálná úspěšnost testu je výrazně nižší, jak ukazuje graf. Na první pohled vidíme, že celkově byla v testu úspěšnější Historická skupina, pouze úlohu 2 lépe vyřešili žáci Procvičovací skupiny. Průměrný počet je 1,7 správných příkladů u Historické skupiny a 1,6 správných příkladů u Procvičovací skupiny.

Nyní analyzujeme jednotlivé úlohy. Pro snazší orientaci nejdříve uvedeme zadání úlohy a budeme postupně hodnotit jednotlivé příklady.

Úloha 1

1. *Tabulka určuje hodnoty logaritmů s přesností na 2 desetinná místa*

   a. *Ověřte platnost tabulky tak že spočítáte log (18) několika různými způsoby*

   log (18) =

   b. *Bez použití kalkulačky spočtěte*

      i. $log\ (21) =$

      ii. $log\left(\frac{56}{5}\right) =$

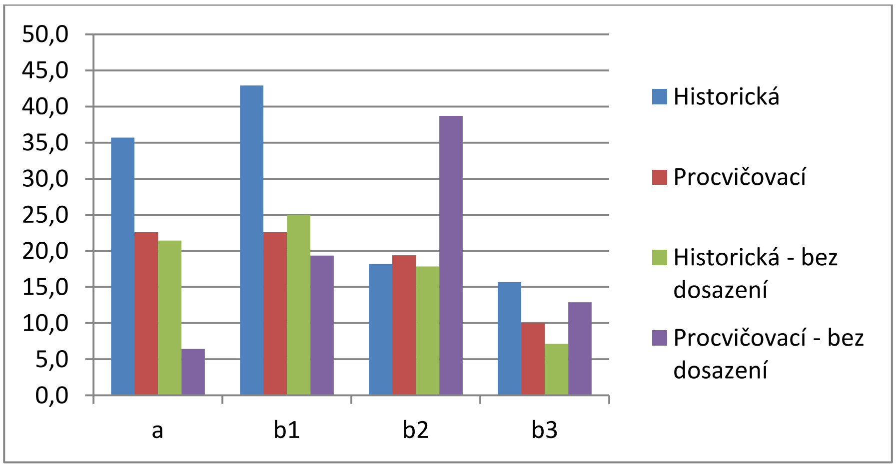
      iii. $log\left(\sqrt[2]{\frac{51}{2}}\right) =$

X	log x	X	log x
1	0,00	**11**	1,04
2	0,30	**12**	1,07
3	0,47	**13**	1,11
4	0,60	**14**	1,14
5	0,70	**15**	1,17
6	0,77	**16**	1,20
7	0,84	**17**	1,23
8	0,90	**18**	1,24
9	0,94	**19**	1,27
10	1,00	**20**	1,30

Smyslem úlohy bylo, aby si žáci vyzkoušeli práci s velmi zjednodušenými logaritmickými tabulkami. Úlohu velmi ocenila Mgr. Dana Vítová, která ji hodlá využívat ve svých hodinách matematiky při zavádění logaritmu.

Žáci se stejným typem úloh setkali na abstraktní úrovni v pracovním listu. Takto výrazný rozdíl v úspěšnosti obou skupin poukazuje na formální znalost logaritmů danou fixací na předpis funkce. Zároveň někteří žáci považují exponenciální funkci za klíč k logaritmu. V ukázkách bude vidět jejich snahu převést příklady této úlohy na exponenciální rovnice.

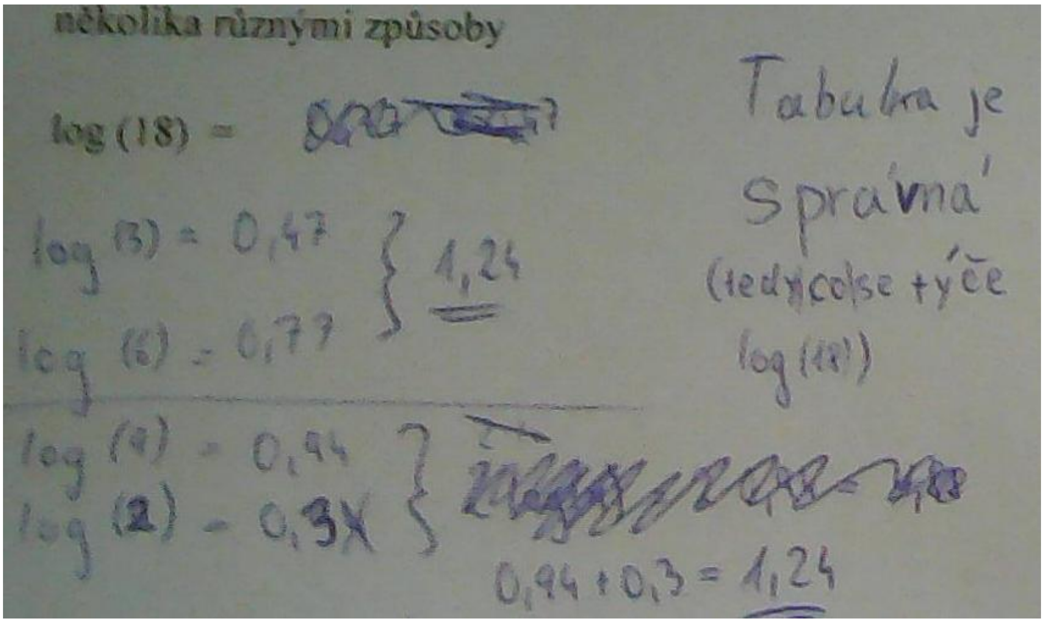
Některá řešení obsahovala pouze abstraktní zápis bez dosazení. Nyní zahrneme i toto částečné řešení k výsledkům jednotlivých příkladů, včetně řešení: $\log\frac{56}{5} = \log 56 - \log 5$ a $\log\sqrt[2]{\frac{51}{2}} = \frac{1}{2}\log 51 - \frac{1}{2}\log 2$. Tyto výsledky poukazují na částečné porozumění tématu. Příklad *a* považujeme za splnění, obsahuje-li vyhledání příslušného logaritmu v tabulce a alespoň jedno ověření.



graf 8: Test – úspěšnost úlohy 1

Zelené a fialové sloupce grafu 8 ukazují, jaké procento žáků Historické a Procvičovací skupiny argument logaritmu pouze částečně rozložilo, a proto tito žáci nemohli použít tabulku v zadání k vyřešení příkladů. V procvičovací skupině se toto neúplné řešení objevovalo u žáků, kteří žádný příklad nevyřešili správně. V Historické skupině se tato chyba objevila i u žáků, kteří měli první a druhý příklad vyřešen správně. U žáků, kteří ve všech příkladech měli pouze číselný rozklad bez dosazení, můžeme soudit, že projevili faktory ovlivňující výsledky testu uvedené v kapitole Vyhodnocení dat, pravděpodobně měli ostych se doptat na nejasnosti, která spatřovali v zadání.

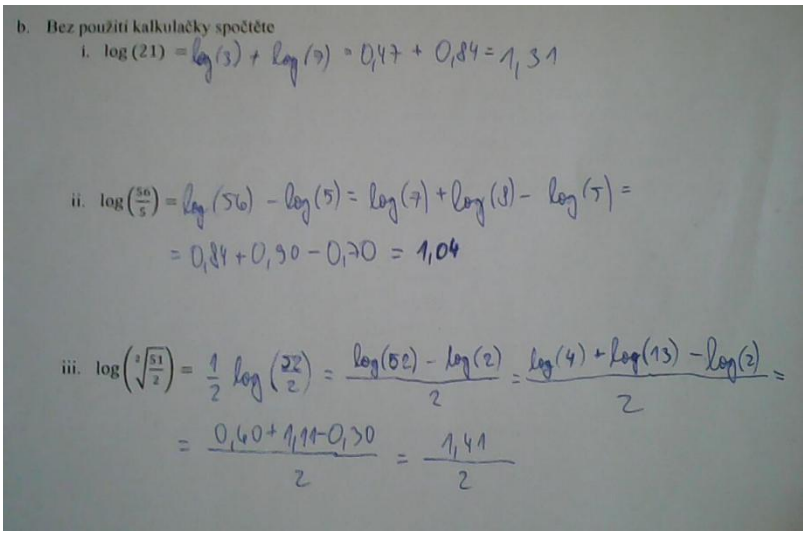
Každá skupina měla odlišné chyby. Nejdříve si ukážeme některá řešení žáků Historické skupiny.



Obrázek 15: 2.14 Test: úloha 1 – Historická skupina

První příklad měl pouze jeden způsob řešení. Kreativita žáků spočívala pouze v rozkladu čísel. Obě možnosti jsou demonstrovány na obrázku 15.

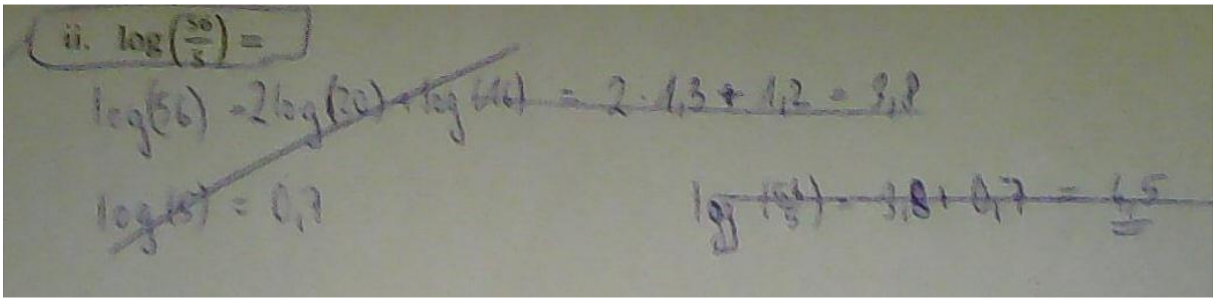
Nyní se zaměříme na zbylé příklady. Každým dalším příkladem byla obtížnost vyšší. Hned první příklad vyžaduje porozumění práce s logaritmem, protože argument funkce je mimo zadanou tabulku.



Obrázek 16: 2.15 Test: úloha 1 – Historická skupina

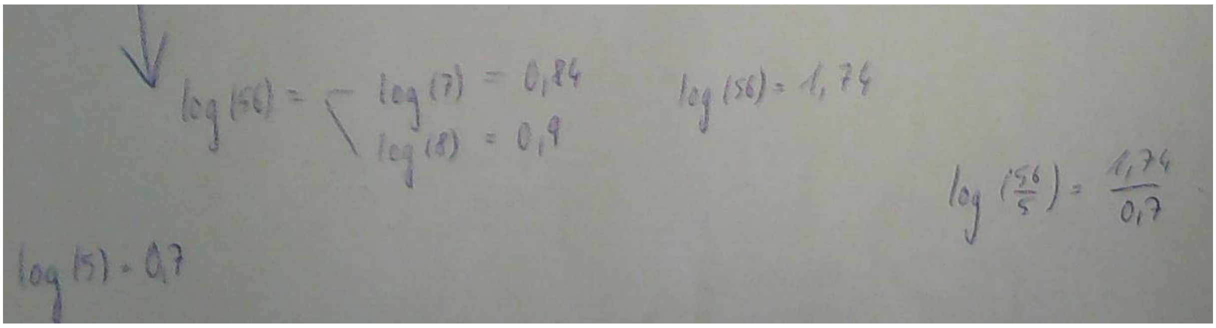
Obrázek 16 je ukázka správného řešení. Žák v posledním příkladu špatně opsal zadání, ale postup je zcela správně.

Následující obrázek ukazuje, jak je pro žáky náročné vyrovnat se s faktem, že logaritmus mění násobení na sčítání. Tato chyba se častěji vyskytovala v Historické skupině, ale objevila se i ve skupině Procvičovací.



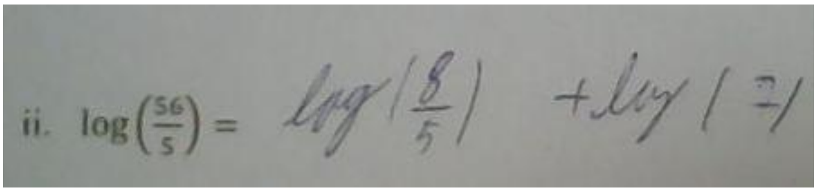
Obrázek 17: 2.16 Test: úloha 1 – Historická skupina

Škrtnuté řešení na obrázku 17 ukazuje snahu rozdělit číslo, které je mimo tabulku, pomocí součtu. Tato chyba se vyskytovala u žáků, kteří měli horší výsledky v pracovním listu, a nebyla vázaná na první fázi výzkumu. Tento konkrétní žák patřící do lepší poloviny vyhodnocených prací, si chybu uvědomil a následně částečně opravil, jak ukazuje obrázek 18.



Obrázek 18: 2.17 Test: úloha 1 – Historická skupina

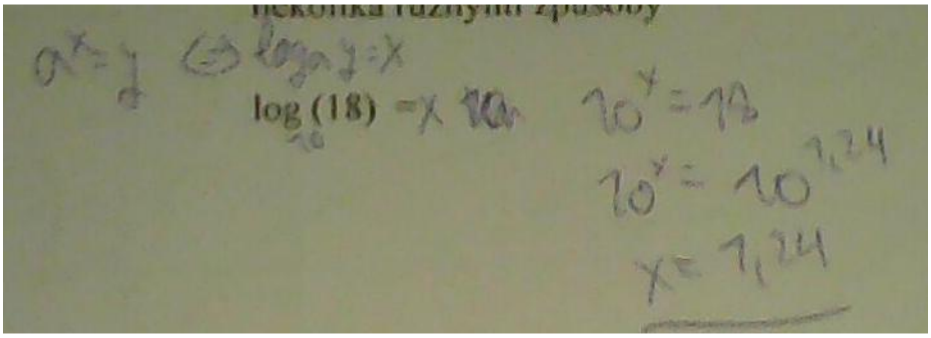
Jak je vidět, větu o rozdílu logaritmů ještě zcela nepochopil a místo odčítání zvolil dělení.



Obrázek 19: 2.18 Test: úloha 1 – Historická skupina

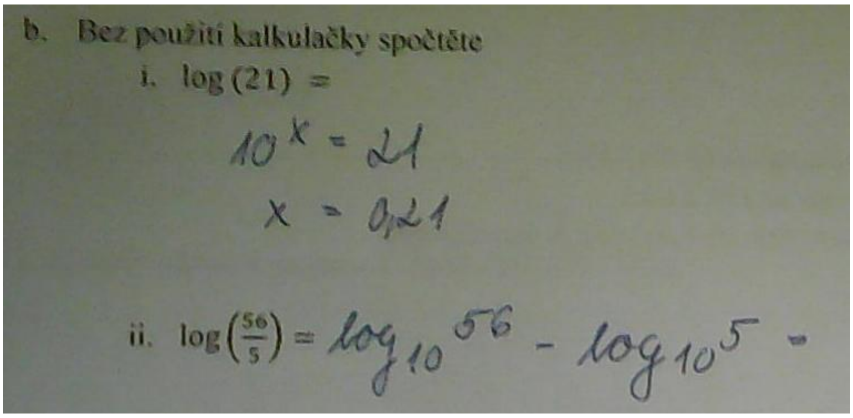
Obrázek 19 ukazuje postup, který se v několika případech objevuje pouze v Historické skupině. Žák uvažoval zcela správně, ale neuměl, použít větu o rozdílu logaritmů i přesto, že se procvičovala ve dvou úlohách pracovního listu. Chyby Historické skupiny spočívaly ve špatných rozkladech, nebo nezvládnutí věty o rozdílu logaritmů. Několik žáků této skupiny neuvedlo řešení žádné.

Procvičovací skupiny měla k této úloze jiný přístup. Chyby v řešení některých žáků odkazují na výuku pomocí inverze exponenciální funkce a řešení exponenciálních rovnic.



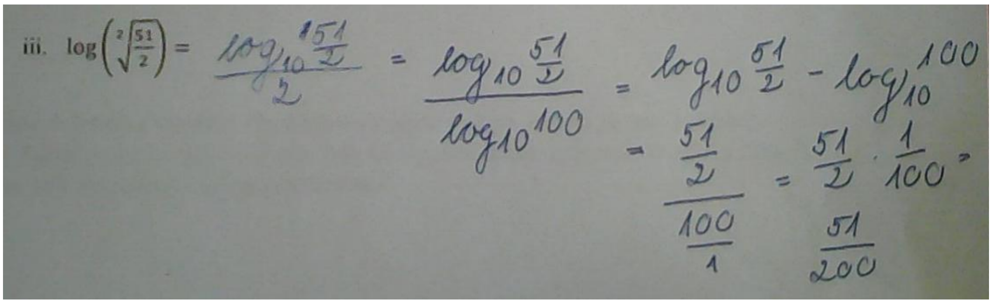
Obrázek 20: 2.19 Test: úloha 1 – Procvičovací skupina

Obrázek 20 ukazuje, že žákova představa je správná, ale fixace na exponenciální funkci mu zabraňuje správně řešit příklady úlohy 1. Následující ukázky řešení jsou od stejného žáka. Jen těžko můžeme posoudit, proč nepracoval se zadanou tabulkou. Přesto je vidět určitý posun směrem k porozumění.



Obrázek 21: 2.20 Test: úloha 1 – Procvičovací skupina

Obrázek 21 ukazuje žákův postupný vývoj řešení úlohy, kdy u příkladu *b.ii.* využil poznatky z pracovního listu. Jeho řešení posledního příkladu je na obrázku 22.



Obrázek 22: 2.21 Test: úloha 1 – Procvičovací skupina

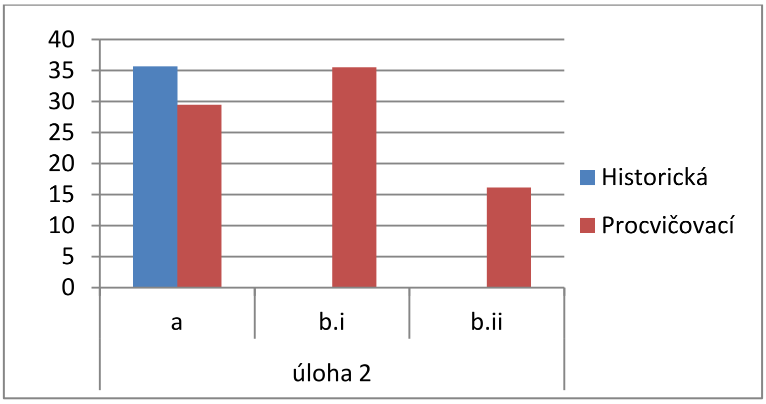
Zde vidíme, že žák přešel od úprav exponenciálních rovnic k úpravám rovnic logaritmických. Ukázky řešení pouze tohoto žáka jsem vybral proto, že ukazuje dvě hlavní chyby, které se vyskytly pouze v Procvičovací skupině. Většinou se žáci buď snažili řešit příklady pomocí exponenciálních rovnic, nebo pomocí úprav logaritmických rovnic. Pouze u tohoto žáka se obě chyby vyskytly najednou.

Výsledky řešení úlohy 1 podporují tvrzení z první kapitoly, že vrcholem výuky logaritmů jsou logaritmické a exponenciální rovnice, kterým se věnuje nejvíce času. Chyby žáků v této úloze jsou vázané na průběh první fáze výzkumu.

Úloha 2

1. *Funkce je dána předpisem* $f(x) = log_{0,85}\, x$
    a. *určete definiční obor a načrtněte graf funkce*
    b. *Automobil ztrácí hodnotu každý rok o 15%.*
        i. *Určete hodnotu auta za 2 roky*
        ii. *Určete dobu (v letech), kdy bude cena poloviční.*

Předpokládal jsem, že první dva příklady by žáci gymnázia měli bez problému vyřešit. Úspěšnost žáků v jednotlivých příkladech ukazuje graf 9.

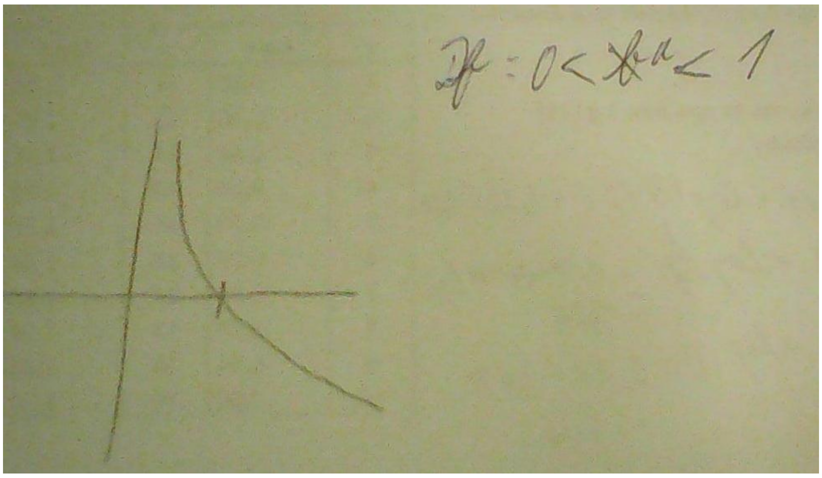


graf 9:Test – úspěšnost úlohy 2

U příkladu *a* jsem předpokládal, že bude úspěšnost vyšší, protože graf funkce byl zopakován a zakreslen na tabuli na konci první fáze výzkumu. Výsledky zbylých dvou příkladů mě velmi překvapily. Žáci Historické skupiny tyto příklady vůbec nezvládli, i když ke správnému řešení šlo dojít pomocí postupného počítání procent. Tento jev si lze vysvětlit několika způsoby:

- Procvičovací skupina podobný typ příkladů více a častěji procvičovala v průběhu výuky matematiky
- Žáci Historické skupiny se nedokázali myšlenkově oprostit od tématu funkcionálních rovnic.
- Výzkum kladl na žáky Historické skupiny větší nároky tím, že pracovali s obecným zápisem, který nikdy dříve neviděli. Projevila se u nich únava.

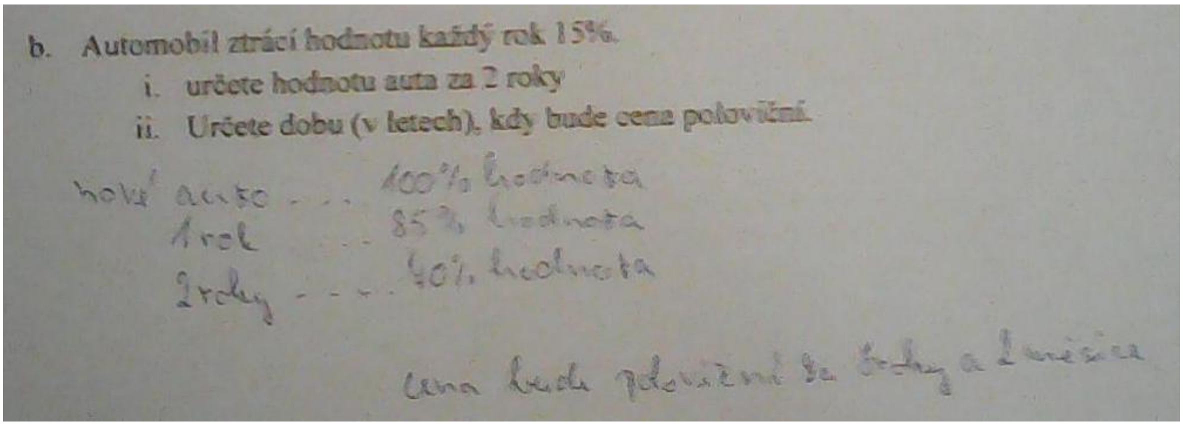
Nejprve uvedeme zajímavá řešení Historické skupiny. Na obrázku 23 je vidět, že někteří žáci, kromě nepopsání grafu, zaměnili podmínku pro základ logaritmu za definiční obor.



Obrázek 23: 2.22 Test: úloha 2 – Historická skupina

Většinou ji žáci uvedli celou a ne tak, jak je ilustrováno. Tato chyba se vyskytla u 10% žáků Historické skupiny a u 6% žáků Procvičovací skupiny. Další chybou byl špatně zakreslený graf.

U druhého příkladu většina žáků Historické skupiny udělala chybu, která je na obrázku 24.

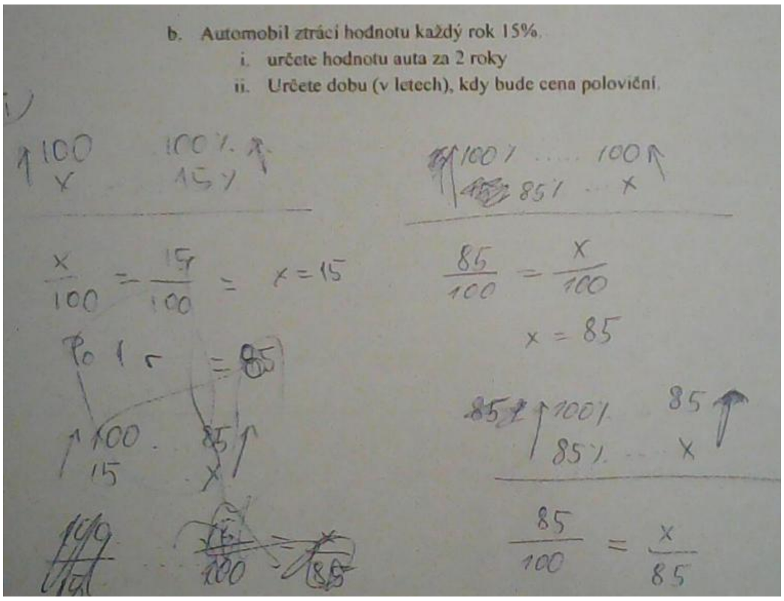


Obrázek 24: 2.23 Test: úloha 2 – Historická skupina

Neuvědomili si, že hodnota automobilu je každý rok jiná, proto se musí už druhý rok uvažovat jiný základ pro počítání procent. Tato chyba se vyskytla i u druhé skupiny, ale v menší míře.

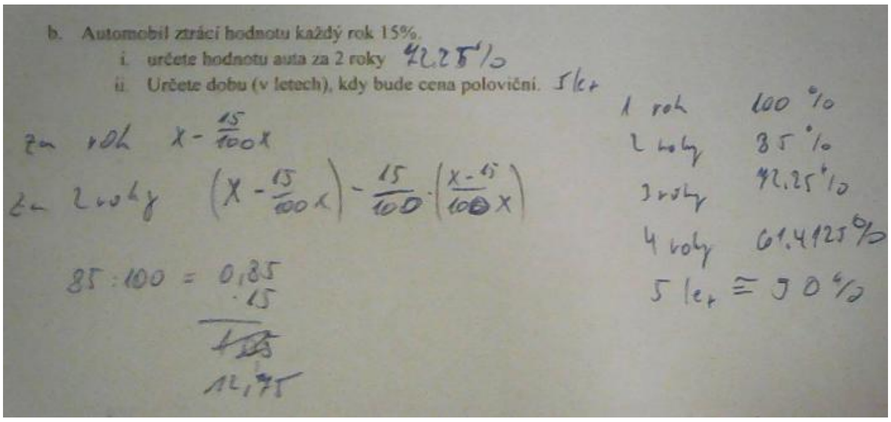
Vzorec pro složené úročení nepoužil nikdo z účastníků výzkumu. Obdobný příklad se objevil v jarním zadání státní maturity pro rok 2016. Je s podivem, že se obdobné příklady nevyskytují v učebnicích zabývajících se logaritmem, kam patří díky nástrojům řešení, ale až v tématu finanční matematika.

Nejzdařilejší řešení Historické skupiny je na obrázku 25. Žák příklad řešil diskrétně a využil přímou úměrnost pro počítání procent. Příklad pravděpodobně nedokončil z nedostatku času.



Obrázek 25: 2.24 Test: úloha 2 – Historická skupina

Na obrázku 26 je nejzdařilejší postup ze všech účastníků testu.

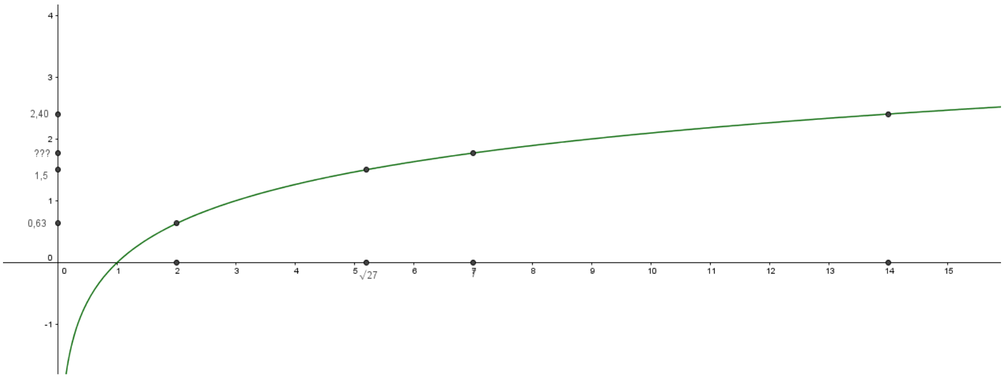


Obrázek 26: 2.25 Test: úloha 2 – Procvičovací skupina

Tento žák Procvičovací skupiny se blíží k obecnému zápisu složeného úrokování. Příklad *b.ii* řešil diskrétně. Použití logaritmu v těchto příkladech vyžadovalo znalost vzorce pro složené úročení.

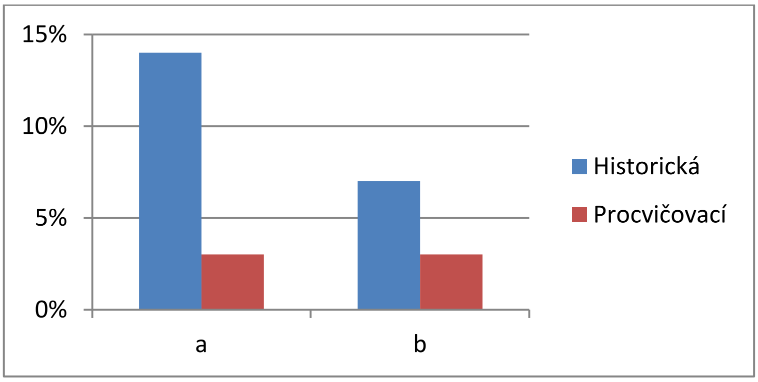
Úloha 3

1. *Na obrázku je graf logaritmické funkce.*



   a. *Najděte funkční hodnotu* $f(7)$
   b. *Zjistěte základ logaritmu a napište předpis funkce*

Úlohu 3 správně vyřešilo velmi málo žáků, jak ukazuje graf 10.



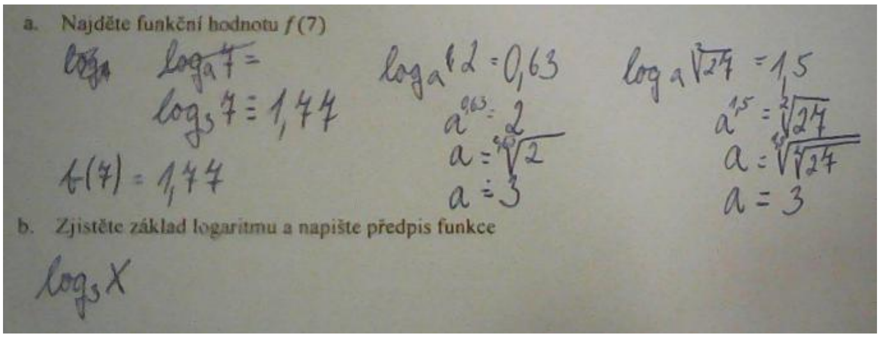
graf 10: test – úspěšnost úlohy 3

Procenta znázorněná v grafu vyjádříme počty žáků. Příklad *a* právně vyřešili čtyři žáci Historické skupiny. Příklad *b* vyřešili již pouze dva žáci Historické skupiny. V Procvičovací skupině jeden žák vyřešil celou úlohu správně. Více správných řešení nebylo.

Úlohu považuji za velmi přínosnou pro pochopení a praktické využití grafu logaritmické funkce. Příklad *a* je grafické zadání úlohy 3 z pracovního listu. Druhý příklad jsem považoval za náročnější, přesto jsem předpokládal, že ho správně vyřeší větší procento žáků.

Většina žáků první příklad řešila pouze odhadem hodnoty pomocí osy *y*. Příčinou tohoto řešení mohla být i ne zcela přesná formulace zadání: "Najděte funkční hodnotu *f*(7)". Místo slova "najděte" mělo být spíše použito slovo "spočtěte". Pro případy těchto nedorozumění byl autor testu zároveň zadávajícím, aby mohl na případné nejasnosti žáků odpovědět. Musíme i u této úlohy uvažovat faktory ovlivňující výsledky testu, které jsou zmíněny výše. Nicméně odpovědi žáků spíše nasvědčují, že si s úlohou neuměli poradit.

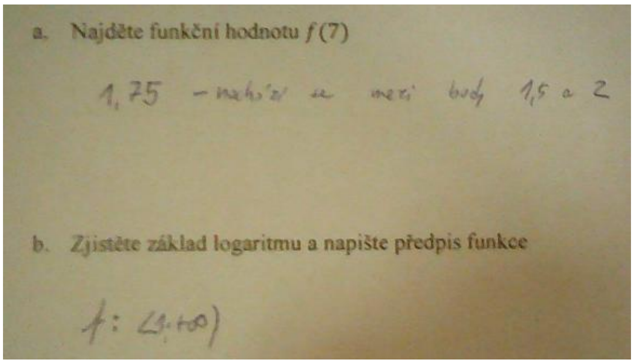
Na obrázku 27 je správné žákovské řešení úlohy.



Obrázek 27: 2.26 Test: úloha 3 – Historická skupina

Obrázek ukazuje, že někteří žáci pro vyřešení příkladu *b* nepotřebovali třetí pomocnou hodnotu, která v tomto případě sloužila pouze pro ověření správnosti. Ukázka je z nejlepší práce žáka Historické skupiny.

Obrázek 28 ukazuje chybné žákovské řešení. Je patrné, že žák nevěděl, jak má úlohu řešit a zadání porozuměl správně.



Obrázek 28: 2.27 Test: úloha 3 – Procvičovací skupina

K příkladu *a* žák připsal: "1,75 – nachází se mezi body 1,5 a 2". V příkladu *b* odhaduje základ logaritmu od tří do nekonečna.

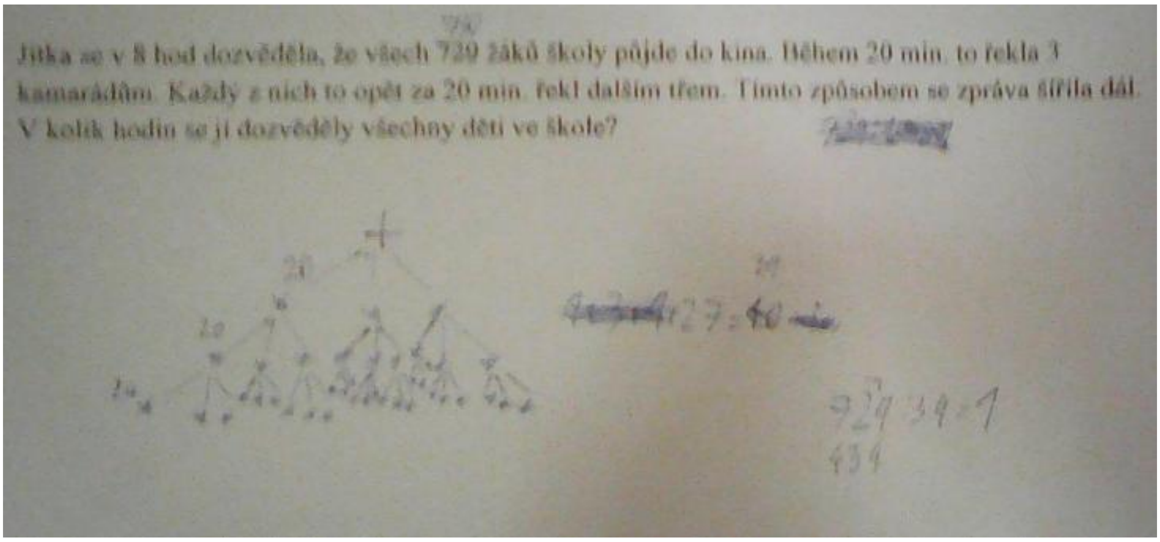
S tímto typem úloh se žáci neměli šanci nikde setkat. Předpokládal jsem, že si přesto propojí poznatky získané vypracováním pracovního listu s logaritmickou funkcí. Výsledky naznačují, že použití příkladů inspirovaných funkcionálními rovnicemi rozšířily znalosti žáků Historické skupiny, kteří je pak byli schopni použít i ve zcela jiném kontextu.

Úloha 4

1. *Jitka se v 8 hodin dozvěděla, že všech 729 žáků školy půjde do kina. Během 20 min. to řekla 3 kamarádům. Každý z nich to opět za 20 min. řekl dalším třem. Tímto způsobem se zpráva šířila dál. V kolik hodin se ji dozvěděly všechny děti ve škole?*

Poslední úloha testu byla navíc a předpokládal jsem, že ji vyřeší pouze nejschopnější žáci. Úlohu správně nevyřešil nikdo, proto nejsou výsledky znázorněny grafem. Zvolil jsem menší hodnotu, než byla v původním zadání. Zajímalo mě, jak výsledek úlohy ovlivní hodnota, která je zároveň šestou mocninou čísla tři, které v úloze také figuruje.

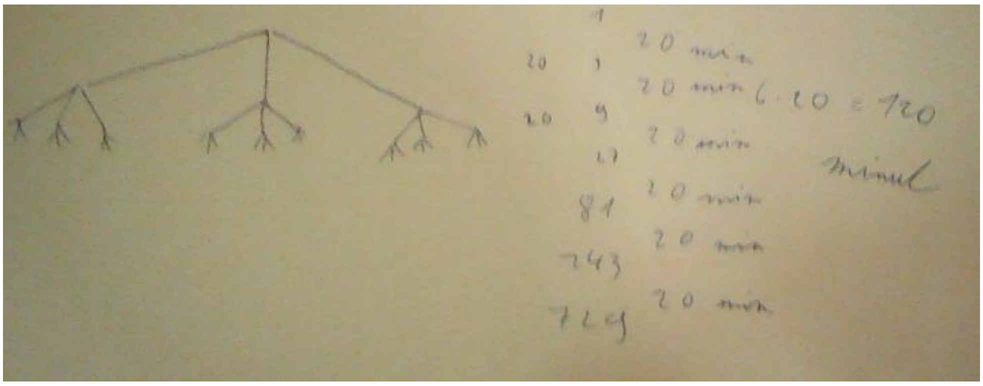
Žáci tuto hodnotu brali jako signál a většinou považovali za vyřešenou pouze nalezením patřičné mocniny. V několika případech můžeme pozorovat vyrovnání se s určitým nesouhlasem s řešením poupravením zadání, jak je vidět na obrázku 29.



Obrázek 29: 2.28 Test: úloha 4 – Procvičovací skupina

Na obrázku je to špatně vidět, ale žáka přepsal hodnotu zadání místo 729 na 730, čímž se chtěl vyrovnat se skutečností, že daná informace vzešla od Jitky. Někteří žáci připsali do zadání "dalších". Tím docílili stejného efektu.

Někteří žáci si kreslili schéma a následně vytvořili posloupnost, kterou nesečetli, ale za výsledek považovali poslední hodnotu, jak je ukázáno na obrázku 30.



Obrázek 30: 2.29 Test: úloha 4 – Procvičovací skupina

Řešení úlohy ukazuje, že síla signálu byla tak velká, že někteří žáci úlohu nedořešili, i když jejich úvaha byla správná.

2.6 Dotazník

Komentované zadání dotazníku

Cílem dotazníku bylo doplnit výsledky pracovního listu a testu. Zkoumá subjektivní názory žáků na absolvovaný výzkum, ale i na názory žáků na několik aspektů vztahujících se k tématu funkcí. Dotazník byl pro obě skupiny téměř stejný. Historická skupina měla dvě otázky navíc, které se vztahovaly k novému prostředí, ve kterém žáci pracovali.

1) *Kdy jsem zjistil/a, že se jedná o logaritmy*
   a) *hned v úvodu hodiny*
   b) *v průběhu Pracovního listu 1*
   c) *v průběhu Pracovního listu 2*
   d) *nezjistil/a v průběhu samostatné práce*

Tato otázka se týká pouze Historické skupiny. Vzhledem k mé usilovné práci na přípravě výzkumu jsem měl dojem, že žáci musí logaritmus identifikovat téměř okamžitě. Proto jsem se při zavádění historické definice striktně vyhýbal použití signálních slov, aby odpověď na tuto otázku byla co nejobjektivnější. Odpověď nám ukáže, jestli jsou žáci schopni získané znalosti chápat i v jiném kontextu, než ve kterém je získali. V souvislosti s pracovním listem a testem budeme moci touto otázkou zjistit míru formálního poznání logaritmů.

2) *Historický výklad*
   a) *rozšířil mé znalosti o logaritmech*
   b) *nerozšířil mé znalosti o logaritmech*

Druhá otázka, také pouze pro Historickou skupinu, se týká prostředí funkcionálních rovnic. Jestli žáci subjektivně pociťovali, že jim toto prostředí pomohlo v chápání logaritmů, je tato informace cenná pro jeho zařazení do výuky jako doplněk středoškolských učebnic.

3) *Napište alespoň jeden nový poznatek, který jste se v průběhu této výuky/testu dozvěděli*

Třetí otázka je pro obě skupiny stejná. Žáci mají vlastními slovy vyjádřit, který poznatek si z výzkumu odnesli. Výzkum směřoval k numerickému počítání s logaritmem, k dovození vět o logaritmech a funkční hodnotě logaritmu jedné, k ukázkám využití logaritmu v běžném životě. Předpokládám, že mnozí žáci na tuto otázku neodpoví.

Třetí až sedmá otázka je společná pro obě skupiny.

4) *Která skupina funkcí vám přijde jako nejobtížnější*

a) *mocninné funkce*	b) *logaritmické funkce*
b) *exponenciální funkce*	d) *goniometrické funkce*

Čtvrtá otázka zjišťuje, která třída funkcí je podle žáků nejobtížnější. Jedná se pouze o subjektivní názor žáků, ze kterého nelze vyvodit obecné závěry. Má potvrdit nebo vyvrátit domněnku, že pro žáky je subjektivně nejobtížnější logaritmická funkce.

5) *Jaká reprezentace funkcí vám nejvíce vyhovuje*

a) *předpis* b) *graf* c) *tabulka*

Pátá otázka doplňuje informace získané testem. Každá úloha testu využívala jinou reprezentaci logaritmické funkce. Analýza testu nám ukázala, že žáci měli největší potíže s úlohou zadanou grafem, proto by měl být graf i nejméně četnou odpovědí.

6) *Která úloha v testu vám přišla nejzajímavější*

a) *úloha 1*	c) *úloha 3*
b) *úloha 2*	d) *úloha 4*

Šestá otázka zkoumá názory žáků na jednotlivé úlohy testu. Spektrum úloh bylo rozmanité, aby zaujali co nejvíce žáků. Motivace žáků je větší, jestli řeší úlohu, která je zaujala. Touto informací zjistíme, který typ úloh zvolit k doplnění výuky.

7) *Jak byste vysvětlili, co je logaritmus*.

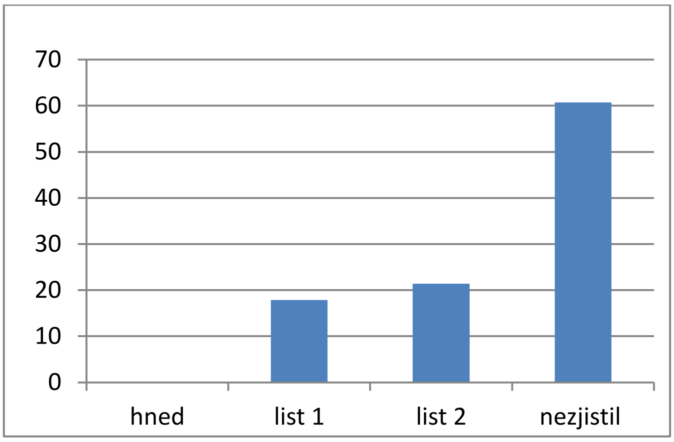
Sedmá otázka má otevřenou odpověď. Žáci musí sami formulovat, co je logaritmus. Informace získané touto otázkou doplní již získaná data o míře formální či neformální znalosti logaritmu.

2.6.1 Analýza dotazníku

Vždy nejdříve zopakujeme otázku, kterou následně vyhodnotíme. Opět budeme používat názorné grafy i porovnávání jednotlivých skupin.

Kdy jsem zjistil, že se jedná o logaritmy

Graf 11 ukazuje, že šedesát procent žáků Historické skupiny v průběhu první fáze nezjistilo, že procvičovaným matematickým konstruktem je logaritmus.



graf 11: Dotazník – otázka 1

Tento výsledek poukazuje na fakt, že žáci získanou znalost o logaritmech neumí rozpoznat v jiném kontextu. Výsledky testu se shodují s tímto tvrzením.

Vývoj výuky matematiky zcela změnil úlohu logaritmu. Jak je ukázáno v první kapitole, příčina vzniku se stala důsledkem. Časový odstup dvou měsíců od výuky tohoto tématu byl záměrný. Cílil jsem na fakta, která si žáci z výuky dlouhodobě odnesli.

Historický výklad rozšířil/nerozšířil mé znalosti

K této otázce grafické srovnání odpovědí zbytečné. Odpovědi byly zcela vyrovnané, čtrnáct žáků si myslelo, že práce s obecným matematickým konstruktem byla přínosná, čtrnáct žáků žádný přínos nevidí. Pracovní list ukazuje, že práce s obecným zadáním funkce bylo pro žáky spíše přínosné, Historická skupina dosáhla lepších výsledků než skupina Procvičovací. V rámci své profesní praxe určitě některé prvky funkcionálních rovnic zařadím do své výuky logaritmu.

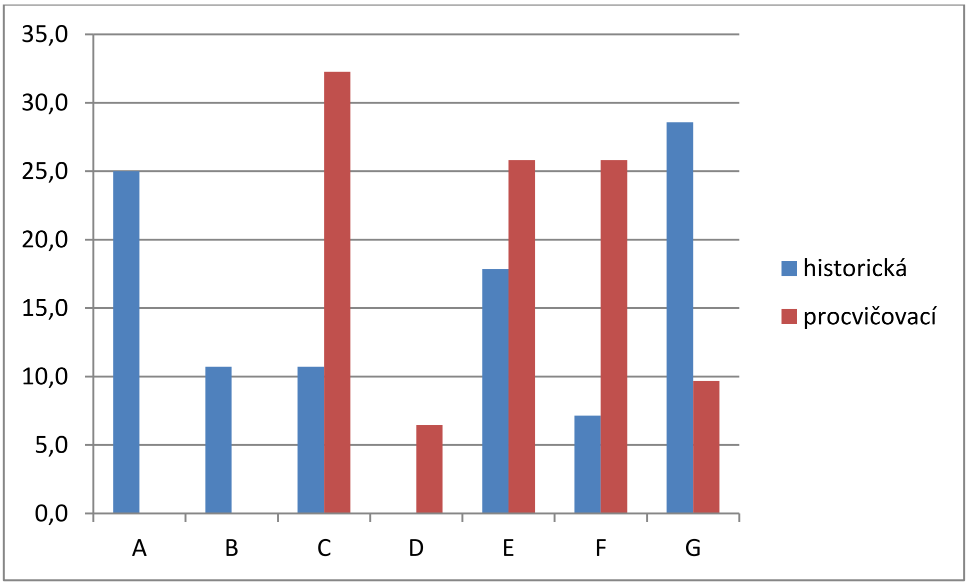
Napište alespoň jeden nový poznatek, který jste se v průběhu výuky/testu dozvěděli.

Třetí otázka měla otevřenou odpověď. Odpovědi se v rámci obou skupin příliš nelišily, a proto je můžeme rozdělit do šesti kategorií.

A. Logaritmus byl dříve než funkce
B. Měl bych zlepšit své znalosti o logaritmu
C. Jedna z vět o logaritmu

$\log 1 = 0\ ;\ \log x^n = n \log x\ ;\ \log(a \,.\, b) = \log a + \log b$

D. Logaritmus se dá využít v praktickém životě
E. Nerozumím logaritmu
F. Jiná odpověď:
G. Bez odpovědi



graf 12: Dotazník - otázka 3

Informaci, že logaritmus byl zaveden dříve než funkce, jsem sdělil oběma skupinám. Ale Historické až v okamžiku, kdy odevzdali pracovní listy, kdežto Procvičovací skupině jsem touto informací výzkum uváděl. Tak veliké procento žáků Historické skupiny, kteří si tuto informaci zapamatovali, souvisí s jejich překvapením, že pracovních listech vlastně procvičovali logaritmy.

Za úspěch historického výkladu považuji odpověď B, kdy tři žáci sebekriticky zhodnotili, že znalost logaritmu je důležitá a že by si ji měli zlepšit. Tato odpověď se neobjevila u Procvičovací skupiny.

Věty o logaritmu pro žáky určitě nejsou nový poznatek. Ale celý výzkum je na nich postaven. Zatím se jedná pouze o informaci uloženou v krátkodobé paměti. Jestli se tento poznatek žákům dlouhodobě uchová ve spojení s logaritmem, měl by jim usnadnit jeho aplikaci.

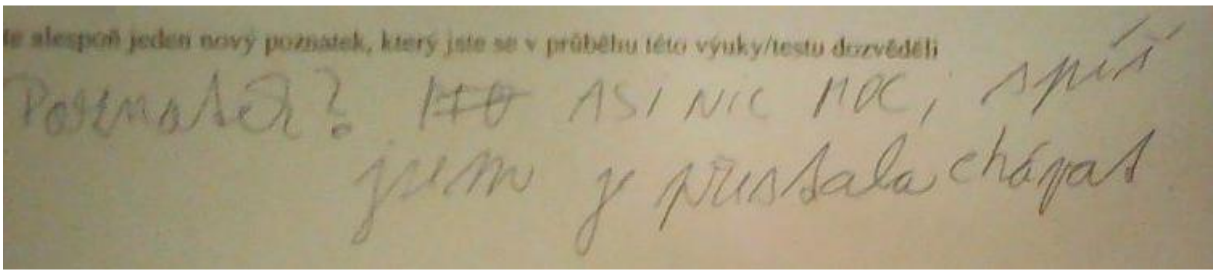
Pro Procvičovací skupinu byl výzkum pouhé opakování a testování, z toho důvodu věnovali větší pozornost zadání úloh testu. Tímto si vysvětluji, že pouze u ní se objevila odpověď spojená s praktickým využitím logaritmu.

Velké procento žáků z obou skupin přiznalo, že nerozumí logaritmu. To vysvětluje špatné výsledky testu. Část žáků neuvedla žádnou odpověď.

Ve skupině odpovědí F (jiná odpověď) jsou informace, které si žák vztáhl sám k sobě, nebo odpovědi bez výpovědní hodnoty. Například:

- Kalkulačka v mobilu má pouze logaritmus o základu deset
- Díky jednomu vzorečku se dá spočítat spoustu různých úloh
- Opakování

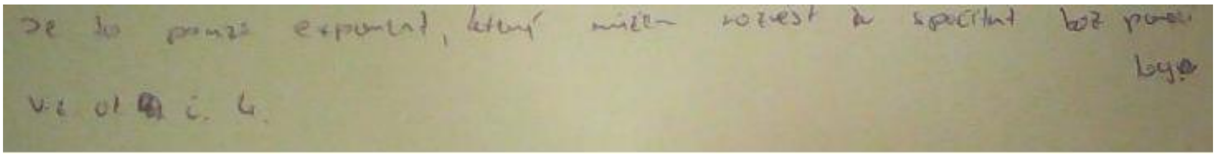
Na závěr si ukážeme některé zajímavé ukázky, které spadají do kategorie jiné. Text bude kvůli čitelnosti pod obrázkem uveden znovu. Některé příspěvky okomentuji, některé mají výpovědní hodnotu bez komentáře.



Obrázek 31: 2.30 Otázka 3 – Historická skupina

"Poznatek? Asi nic moc, spíš jsem je přestala chápat."

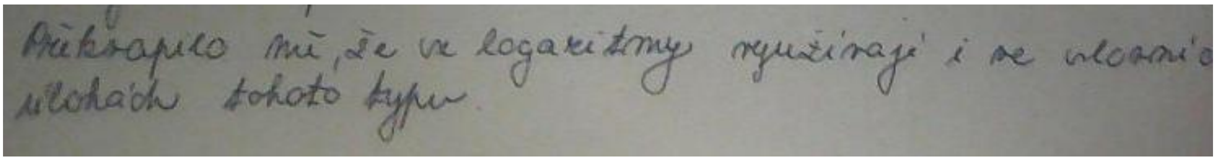
Pouze jeden žák vyslovil domněnku, že výzkum mu ztížil chápání logaritmu. Tento počet považuji za úspěch výzkum.



Obrázek 32: 2.31 Otázka 3 – Procvičovací skupina

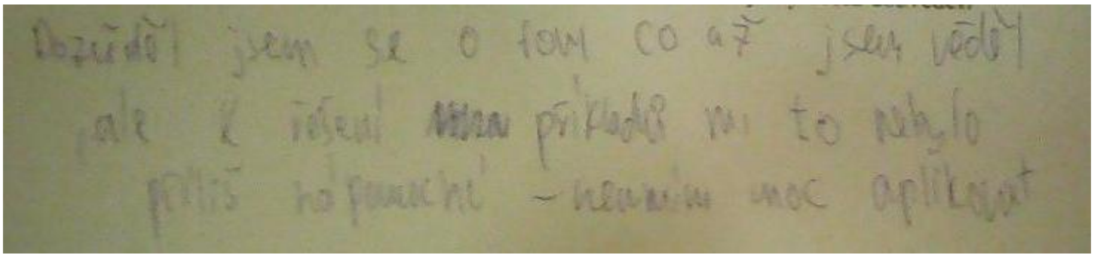
"Že je to pouze exponent, který můžeme rozvést a spočítat bez použití log."

Odpověď žáka Procvičovací skupiny, který se v první úloze testu snažil použít exponeniální rovnice.



Obrázek 33: 2.32 Otázka 3 – Historická skupina

"Překvapilo mě, že se logaritmy využívají i ve slovních úlohách tohoto typu."



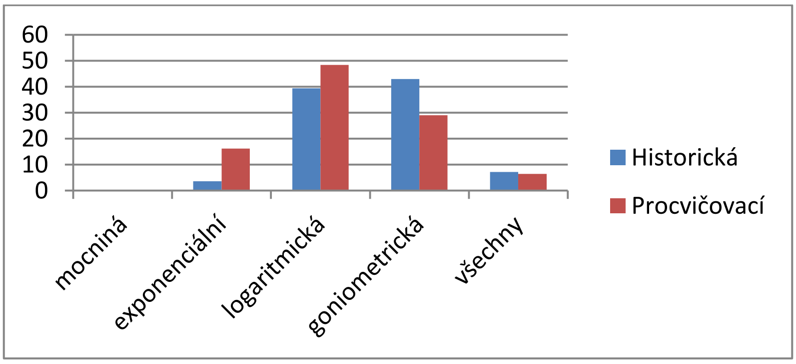
Obrázek 34: 2.33 Otázka 3 – Procvičovací skupina

"Dozvěděl jsem se o tom, co už jsem věděl, ale k řešení příkladů mi to nebylo příliš nápomocné – neumím moc aplikovat."

Tento žák nemá v matematice sebevědomí. Obdobné komentáře připsal i k řešení testu.

Která skupina funkcí vám přijde nejobtížnější

Graf 13 ukazuje subjektivní názory žáků na obtížnost jednotlivých tříd funkcí. Někteří žáci zakroužkovali všechny funkce, proto jsem do grafu přidal i tuto odpověď.

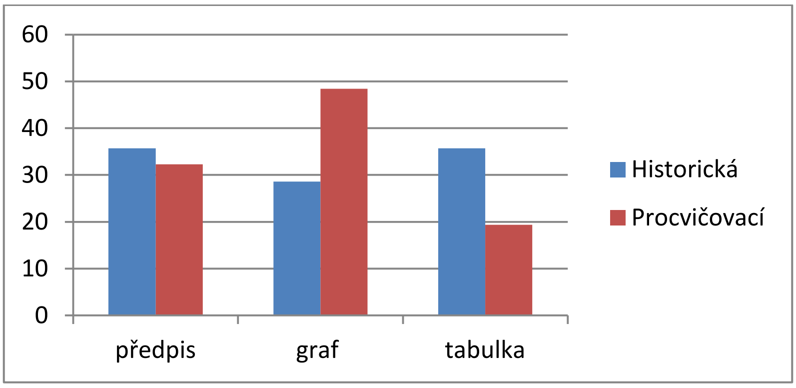


graf 13: Dotazník – otázka 4

Podle názorů žáků jsou nejobtížnější třídy funkcí logaritmická a goniometrická. V Historické skupině téměř stejné procento odpovědělo logaritmická jako goniometrická. V Procvičovací skupině větší procento žáků považuje za nejobtížnější třídu funkcí právě logaritmickou. Tento rozdíl mohl vzniknout rozdílnou první fází výzkumu.

Jaká reprezentace funkcí vám nejvíce vyhovuje.

Graf 14 ukazuje, kolik procent žáků preferuje jakou reprezentaci funkcí.

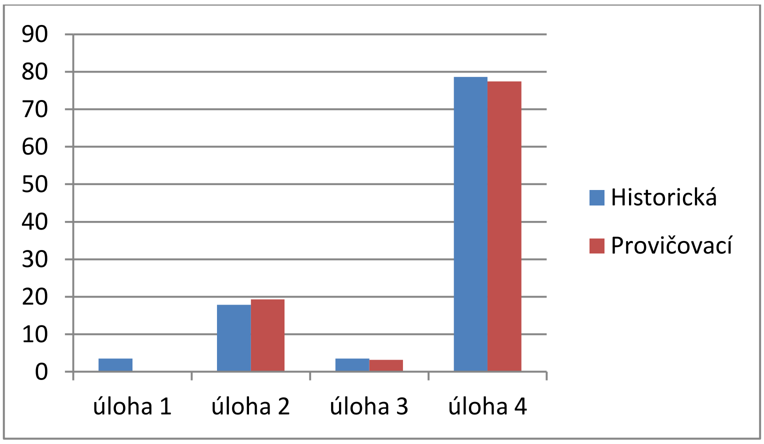


graf 14: Dotazník – otázka 5

Tento údaj není nijak ovlivněn tímto výzkumem. U Historické skupiny jsou odpovědi vyrovnané. Téměř padesát procent žáků procvičovací skupiny preferuje graf. Tyto údaje se neshodují s výsledky testu, kde grafické zadání úlohy mělo minimální úspěšnost řešení.

Která úloha v testu vám přišla nejzajímavější

Graf 15 ukazuje odpovědi v procentech na tuto otázku.

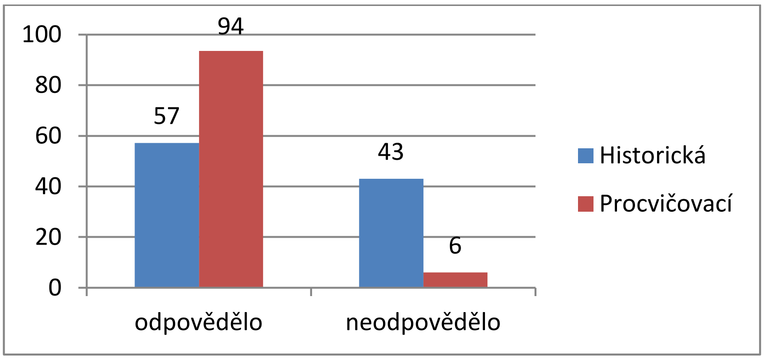


graf 15: Dotazník – otázka 6

Z grafu je patrné, že odpověď na tuto otázku nebyla ovlivněna rozdílným průběhem výzkumu. Většina všech žáků považovala za nejzajímavější čtvrtou úlohu testu. Tato úloha měla netradiční zadání, které bylo vázané na látku, kterou žáci ještě neprobírali. Tuto úlohu nevynechal žádný žák. Na základě signální hodnoty si všichni mysleli, že úlohu vyřešili správně. Tento jejich dojem je pravděpodobně i příčinou jejich odpovědí.

Jak byste vysvětlili, co je logaritmus.

Odpověď na tuto otázku by byla složitá i pro učitele matematiky. Je otevřená volné interpretaci vlastních názorů. Graf 16 ukazuje v procentech, jaká část žáků které skupiny na otázku odpověděla. Odpovědi nešlo kategorizovat, proto je popisujeme pouze slovně bez grafického znázornění, které je u otázky 3.

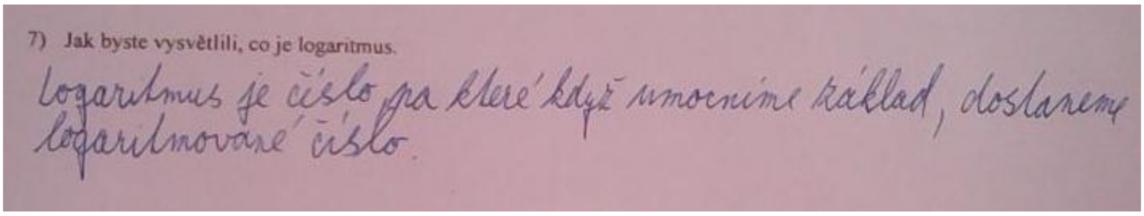


graf 16: Dotazník – otázka 7

Žáci měli mít nějakou představu, co logaritmus je, ještě před začátkem výzkumu. Časový odstup od výuky tohoto tématu by nám měl pomoci zjistit, jakou znalost si přinesli do dalších ročníků studia, případně do běžného života.

Význam matematiky nemá spočívat v zapamatování si velkého množství poznatků. Má vést k rozvoji myšlení, k pochopení jasně stanovených pojmů a následné manipulaci s nimi v uzavřeném a jasně logicky uspořádaném prostředí. Matematika je vlastně tréninkový prostor reálného života.

Poměrně vysoké procento žáků Historické skupiny, kteří nenapsali odpověď, je způsobeno průběhem první fáze výzkumu. To koresponduje s otázkou tři, kdy dvacet osm procent žáků této skupiny napsalo, že by si měli zlepšit znalosti o logaritmu, nebo že mu nerozumí. Procvičovací skupina měla také vysoké procento odpovědí "nerozumím logaritmu", ale alespoň nějak odpověděla na tuto otázku. Nyní si ukážeme relevantní odpovědi na tuto otázku ukázkami odpovědí jednotlivých žáků. Odpovědi budou přepsány pod obrázek, aby byly dobře čitelné.



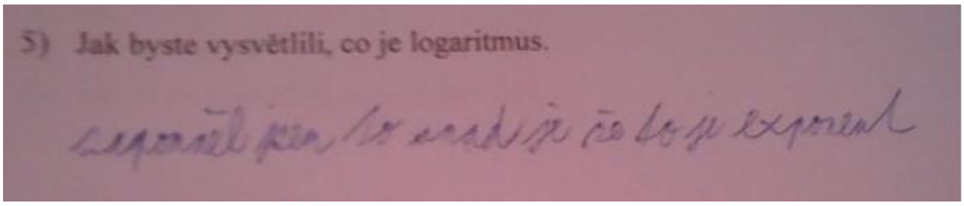
7) Jak byste vysvětlili, co je logaritmus.

logaritmus je číslo na které když umocníme základ, dostaneme logaritmované číslo.

Obrázek 35: 2.34 Otázka 7 – Historická skupina

"Logaritmus je číslo, na které když umocníme základ, dostaneme logaritmované číslo."

Odpověď jako na obrázku 35 napsali tři žáci Historické a dva žáci Procvičovací skupiny odpověděli definicí:Tato definice je správná.

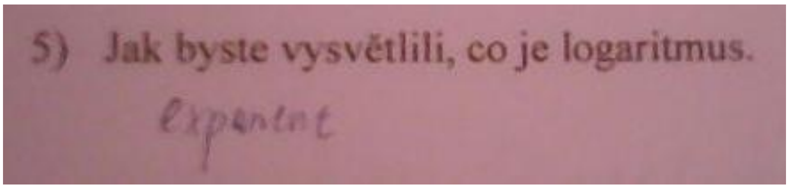


5) Jak byste vysvětlili, co je logaritmus.

zapomněl jsem to snad že je to exponent

Obrázek 36: 2.35 Otázka 7 – Procvičovací skupina

"zapomněl jsem to, snad že je to exponent"



5) Jak byste vysvětlili, co je logaritmus.

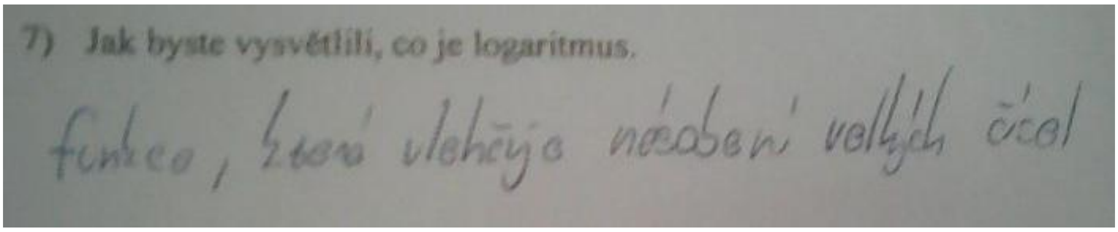
exponent

Obrázek 37: 2.36 Otázka 7 – Procvičovací skupina

"exponent"

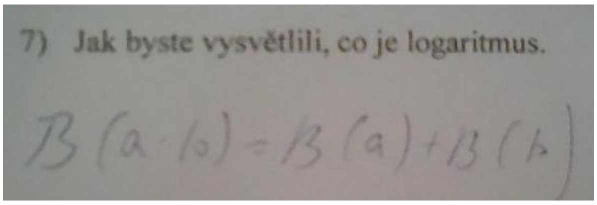
Obrázek 36 a 37 ukazuje nejčastější odpověď Procvičovací skupiny, která se objevila v padesáti osmi procentech. V Historické skupině se tato odpověď vůbec neobjevila. Tato odpověď je nedostačující, i když její podstata je správná. Vysvětlením může být, že žáci uchovávali definici správnou definici pouze paměťově bez hlubšího porozumění a postupem času ji zredukovali ta toto jediné slovo

Výzkum ukázal, že žáci Procvičovací skupiny tíhli i při řešení testu k exponenciálním rovnicím, které však v daných úlohách nemohly vést ke správnému výsledku, vyjma jednoho příkladu.



Obrázek 38: 2.37 Otázka 7 – Historická skupina

"Funkce, která ulehčuje násobení."



Obrázek 39: 2.38 Otázka 7 – Historická skupina

"B(a.b) = B(a) .B(b)"

Obrázky 38 a 39 ukazují vliv první fáze výzkumu. Tyto odpovědi se patřily dvěma žáků Historické skupiny, které řadíme mezi výsledkově úspěšnější. Nikdo jiný podobně neodpověděl. Ukazuje to, že první fáze výzkumu provedená pomocí zjednodušených obecných funkcionálních rovnic měla na žáky vliv.

Zbytek odpovědí neměl relevantní vypovídající hodnotu. Jednalo se o dopovědi typu: logaritmus je matematický pojem, logaritmus je předpis, už jsem to zapomněla, atd.

2.7 Srovnání výsledků jednotlivých nástrojů výzkumu

V této kapitole jsem porovnával úspěšnosti pracovního listu s úspěšností testu. Také jsem se pokusil tyto výsledky porovnat s dotazníkem. Tyto výsledky přispěly k formulaci hodnocení cílů výzkumu.

Žáci, kteří byli úspěšnými řešiteli pracovního listu, byli i úspěšnějšími řešiteli testu. Tuto skutečnost ještě podpořily odpovědi v dotazníku na otevřené otázky.

Rozdíly úspěšnosti jednotlivých žáků v pracovním listu a testu se objevily pouze u některých žáků v Historické skupině. Tito žáci, v rámci skupiny, nadprůměrně vypracovali pracovní list, ale v testu správně nevyřešili žádný příklad. Tato skutečnost poukazuje na to, že si tito žáci nepropojili historický matematický konstrukt, se kterým pracovali, s logaritmem. U Procvičovací skupiny úspěšnost pracovního listu odpovídala úspěšnosti testu ve všech případech. Ani jednu úlohu testu nevyřešilo správně 37 % všech respondentů, a tento údaj byl rovnoměrně rozložen mezi oběma skupinami.

Odpovědi na uzavřenou otázku na oblíbenou reprezentaci funkcí nekorespondují s úspěšností řešení úloh, které jsou na dané reprezentaci funkce založeny. Nejvíce se tento jev projevil v případech, kdy žáci označili za nejoblíbenější reprezentaci graf. Ale i zde hraje roli skutečnost, že více než třetina žáků nevyřešila ani jeden příklad.

Žáci, kteří v dotazníku označili logaritmickou funkci za nejnáročnější, měli podprůměrné výsledky testu, nikoli však pracovního listu. Hlavně v Historické skupině měli někteří tito žáci nadprůměrné výsledky.

Odpovědi na otevřené otázky odpovídají výsledkům testu. Žáci, kteří měli relevantní odpovědi, správně vyřešili alespoň jeden příklad testu.

3 Diskuze

Časový odstup, který měli žáci od bezprostřední výuky logaritmu, se ukázal jako přiměřený a pomohl splnit cíle diplomové práce. Relevance srovnání výsledků zkoumaných skupin je omezena rozdíly mezi těmito skupinami, z nichž nejvýznamnější je podle mého názoru osoba učitele matematiky. Tyto rozdíly však nebylo možno z principiálních i praktických důvodů eliminovat.

1. Určit míru formální a neformální znalosti o logaritmu u žáků střední školy.

Pro hodnocení tohoto cíle se budu držet definice, zmíněné v kapitole Cíle výzkumu. Celý princip výzkumu je postaven na ekvivalenci dvou definic logaritmu. Středoškolská definice se opírá o znalosti mocninných a exponenciálních funkcí. Za její model můžeme považovat exponenciální funkci a práci s exponenty, jak je ukázáno v analýze testů. Pro historickou definici jsem se pokusil zavést model zjednodušených funkcionálních rovnic. Jak je ukázáno, žákům se v tomto prostředí pracovalo dobře. Také jsem v něm nalezl větší možnosti pro odvozování vět o logaritmu.

Historickou definici vyslovil autor sám na základě studia historie logaritmu. Je využitelná hlavně pro numerické počítání s logaritmy, které je v dnešní době nahrazeno kalkulačkami. Ale jak je ukázáno praktickými příklady z jiných vědních oborů, má větší uplatnění pro řešení většího spektra příkladů.

Prvním údajem, který jsem z výzkumu získal, bylo, zda jsou žáci schopni identifikovat logaritmus zadaný pomocí bezkontextových funkcionálních rovnic. Celých 61 % respondentů, z Historické skupiny nezjistilo, že konstrukt, se kterým pracovaly, je logaritmus.

Hlavním kritériem pro stanovení míry formálnosti poznatků o logaritmu byly výsledky testu na nestandardní úlohy o logaritmu. Formální poznatky jsou mnohem slaběji ukotveny v kognitivní struktuře a jejich retence je mnohem slabší. Proto lze očekávat, že s časem uplynulým od výuky se rozdíl mezi formálním a neformálním poznatkem zvýší. Na druhou stanu, jsou-li poznatky žáků pouze formální, tak může dojít k takové míře jejich ztráty, že by žáci nebyli vůbec schopni řešit testové úlohy a výsledky by nebyly vypovídající. Proto absolvovali první fázi, jak je pospána v kapitole Charakteristika výzkumu, která umožnila pro hodnocení využít i časový odstup od samotné výuky. Dvě testové úlohy z této fáze přímo vycházejí. Přesto byla úspěšnost v testu velmi malá.

Poslední významný údaj jsem získat otevřenou otázkou, jak by žáci logaritmus vysvětlili. V Historické skupině správně odpovědělo 28 % žáků. U Procvičovací skupiny tento údaj nelze jednoznačně určit, protože většina žáků se omezila na jednoslovnou odpověď ("exponent"). Hodnocení správnosti této odpovědi je problematické, protože ta může reprezentovat, jak pouho mechanickou znalost bez skutečného významu, tak i velmi stručné vyjádření skutečného pochopení podstaty logaritmu. Doplním-li tento údaj výsledky z testu a ještě odpovědí, nerozumím logaritmu, z otázky zjišťují nový poznatek, opět dostáváme hodnotu blížící se 30 %.

Na základě těchto údajů můžu prohlásit, že znalosti žáků jsou spíše formální. Výpovědní hodnota tohoto výsledku je omezena rozsahem výzkumu.

2. Nalézt a popsat nejčastější žákovské problémy spojené s výukou logaritmu

Analýzou chyb v pracovních listech se ukázala podobnost u obou skupin. U Procvičovací skupiny bylo obtížné popsat hlavní rysy, protože byly skryty předpisem logaritmické funkce, kterou žáci už znali. U Historické skupiny tyto problémy byly velmi dobře pozorovatelné díky práci žáků v prostředí zjednodušených funkcionálních rovnic.

Hlavním žákovským problémem je práce s mocninou argumentu logaritmické funkce. Jedná se o vytýkání mocniny argumentu před funkci a obráceně.

Jak je popsáno v kapitole Analýzy pracovního listu (úloha 3, příklad c a celá úloha 4), měli žáci obtíže i se záporným znaménkem před logaritmickou funkcí. Tuto skutečnost potvrzuje analýza první úlohy testu. Zde žáci uměli argument funkce správně rozložit a najít odpovídající hodnoty, ale v okamžiku vlastního výpočtu už nebyli schopni použít znalost věty o logaritmu podílu a místo odečtení dosazené hodnoty dělili.

Dalším zajímavý jev se vyskytl v úloze 5 příkladu c pracovního listu $\left(\frac{B(10)}{2} + \frac{B(10)}{2}, \text{resp.} \frac{\log_7 10}{2} + \frac{\log_7 10}{2}\right)$, kdy tento příklad zcela právně vyřešilo 31 % žáků Historické skupiny a pouhých 15 % žáků Procvičovací skupiny. Řešením příkladu je jednoduché sečtení zlomků, které většina žáků neobjevila (což lze opět interpretovat tak, že znalost práce se zlomky je u respondentů přinejmenším částečně formální). Poloviční úspěšnost Procvičovací skupiny oproti skupině Historické lze vysvětlit tak, že se žáci natolik soustředili na kontext logaritmické funkce, že se to pro ně stalo překážkou ve vybavení znalosti z jiného, podstatně jednoduššího a lépe známého kontextu (zlomky).

3. Zhodnotit využitelnost bezkontextového užití vlastností popsaných funkcionálními rovnicemi k výuce logaritmů

Výsledky pracovního listu potvrzují, že se žákům ve zjednodušeném prostředí funkcionálních rovnic pracuje dobře. Historická skupina měla průměrný počet správných řešení v pracovním listu o jeden příklad vyšší než skupina Procvičovací. Menší rozdíl byl v úspěšnosti testu, kde Historická skupiny měla průměrně o čtvrtinu příkladu více správných řešení. Zde sehrála významnou roli úloha 2, kde její druhý a třetí příklad nevyřešil žádný žák Historické skupiny, přestože jedno z možných způsobů řešení bylo pomocí jednoduchého počítání procent. Tuto možnost si vybrali žáci Procvičovací skupiny. Vzhledem k malé úspěšnosti testu tento fakt sehrál významnou roli. Při vyrovnaném výsledku správných řešení této úlohy by byl rozdíl obou skupin větší.

Užití vlastnosti popsané funkcionální rovnicí k výuce logaritmů jsem Historické skupině představil jako historický matematický konstrukt a vůbec jsem ho v průběhu první fáze nedával do souvislosti s logaritmem. Cílem pracovního lisu bylo vyzkoušet nové prostředí pro výuku logaritmu. Toto prostředí by mohlo být využitelné i pro další funkce. Pracovní list byl vytvořen tak, aby žáci měli možnost odvodit věty o počítání s logaritmem. To se v této skupině podařilo pouze zčásti. Většina žáků objevila souvislost mezi součtem a rozdílem logaritmů, jak ukazuje analýza pracovního listu. Přesně polovina žáků Historické skupiny odpověděla kladně na otázku, zda historický výklad rozšířil jejich znalosti logaritmu.

Překvapivé výsledky přinesl Pilotní výzkum, kdy žáci objevili větu o logaritmu mocniny argumentu. Výpovědní hodnotu snižuje skutečnost malého počtu žáků.

Na základě získaných dat jsem dospěl k závěru, že bezkontextové užití vlastností popsaných funkcionálními rovnicemi k výuce logaritmů je přínosné.

4. Zjistit, jaký je vliv alternativního přístupu k procvičování logaritmu na úspěšnost žáků v řešení úloh vedoucích k použití logaritmů.

Všechny získané výsledky ukazují, že odlišný přístup k procvičování logaritmu měl pozitivní vliv na osvojení znalostí. Průměrné výsledky Historické skupiny byly ve všech nástrojích výzkumu lepší. Opět musíme zohlednit faktor dvou různých vyučujících, který vzhledem k omezeným možnostem výzkumu nemohl být eliminován.

Přesto výzkum ukázal, že procvičování pomocí historického matematického konstruktu (zjednodušených funkcionálních rovnic) pomohl k většímu pochopení logaritmů alespoň u poloviny žáků Historické skupiny, kteří tento svůj subjektivní názor vyjádřili v dotazníku, a byl potvrzen výsledky výzkumu.

Závěr

Na základě fylogeneze a ontogeneze konceptu logaritmu jsem navrhl alternativní přístup k výuce logaritmů. Jeho srovnáním s přístupem tradičním jsem naplnil cíle, které si tato práce vytkla.

Hlavní přínos práce spatřuji v dialogu historické motivace objevu logaritmu s dnešní výukou a navržení alternativního prostředí zjednodušených funkcionálních rovnic pro výuku logaritmů (námětem pro další práci by mohlo být ověření, zda by byl analogický postup efektivní i u dalších tříd funkcí, zvláště goniometrických). Vzhledem k dosaženým výsledkům spatřuji v tomto prostředí určitý potenciál pro zpestření výuky tématu funkcí.

Dále práce nabízí pestré spektrum nestandardních úloh na logaritmus, které nabízejí pro žáky snazší orientaci v logaritmech i mimo prostředí matematiky.

V poslední řadě vidím veliký přínos pro můj osobní rozvoj. Výrazně jsem si rozšířil přehled o tématu logaritmu. Ověřil jsem si využitelnost nového přístupu, kterým doplním svou výuku. Jeho přínos vidím nejen v tématu logaritmů.

Práci je možno rovinou vícero způsoby, například by šlo zkoumat postup řešení jednotlivými žáky formou strukturovaných rozhovorů. Zajímavé by mohlo být i srovnání úspěšnosti studentů různých středních a případně i vysokých škol.

Literatura:

- BOYER, Carl B. *History of analytic geometry*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2004. ISBN 0486438325.
- BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia Základní poznatky*. 4. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-366-0.
- CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU: 2.díl*. 1. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-057-8.
- DUNHAM, William. *Euler The Master of Us all*. Washington: The Mathematical Association of America, 1999. ISBN 978-0883853283.
- EDWARDS, C.H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979. ISBN 0-540-90436-0
- HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. 1. české vyd., 2. dotisk. Prometheus, 2006. ISBN 80-214-1868-0.
- HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3
- HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. 1. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.
- JANDA, David. *Funkční myšlení žáků středních škol*. Praha, 2013. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Derek Pilous.
- KOPÁČKOVÁ, Alena. Pojmotvorný proces konceptu funkce. Praha, 2003. Doktorská disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- MERZBACH, Uta C. a Carl B. BOYER. A History of Mathematics. New Jersey: John Willey&Sons, 2010. ISBN 978-0-470-52548-7
- MIXA, Lukáš. *Vybrané matematické objevy na cestě k Newtonovu kalkulu*. Praha, 2013. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Ladislav Kvasz.
- ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia Funkce*. 3. Praha: Prometheus, 1993. ISBN 80-7196-164-7.

- ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť: 3. část. 5. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-039-X.
- SYNKOVÁ, Karolína. *Funkce v matematice na střední škole: diplomová práce.* Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2015. 126 stran. Vedoucí diplomové práce je RNDr. Růžena Blažková, CSc.
- ZUZÁKOVÁ, Jana. Mocniny a logaritmy ve školské matematice. Brno, 2014. Diplomová práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Elekronické zdroje:

- DAVIDOV, Ljubomir. *Funkcionální rovnice* [online]. Praha: Mladá fronta, 1984 [cit. 2016-06-26]. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/404099
- KOPÁČKOVÁ, Alena. Nejen žákovské představy o funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*[online]. 2002, 14 [cit. 2016-06-12]. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/141124
- MATĚJKA, Karel. *Nové postupy pro hodnocení diversity společenstev* [online]. 2007, 10 [cit. 2016-06-14]. Dostupné z: http://www.infodatasys.cz/public/Zvo2007_23.pdf
- O'CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. *The number e* [online]. 2001, , 4 [cit. 2016-04-11]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html
- *Rámcově vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007 [cit. 2016-07-07]. ISBN 978-80-87000-11-3. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/159
- *Rámcově vzdělávací program pro obor vzdělávání: Ekonomika a podnikání* [online]. Praha: Národní ústav odborného vzdělávání, 2007 [cit. 2016-07-07]. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%206341M01%20Ekonomika%20a%20podnikani.pdf
- REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Weber - Fechnerův psychofyzikální zákon* [online]. 2008 [cit. 2016-06-14]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/210-weber-fechneruv-psychofyzikalni-zakon#
- SPRENT, P. The Mathematics of Size and Shape. Biometrics. 1972, roč. 28, č. 1,s. 23-37. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/2528959

Seznam obrázků

Seznam grafů

Přílohy

Pracovní list – pilotní verze

2) Jakému B odpovídají následují součty

   a. B(3) + B(5) =

   b. B(9) + B(7) =

   c. B(1) + B(1) =

3) Dané B vyjádřete pomocí součtu. Vypište více možností, jestli je to možné.

   a. B(24) =

   b. B(13) =

   c. B(32) =

   d. B(144) =

4) Doplňte

   a. B(1) =

   b. B(10^n) =

Pracovní list – Historická skupina

Pracovní list 1

1) Jakému B odpovídají následující součty

    a. B(3) + B(5) =

    b. B(9) + B(7) =

    c. B(1) + B(1) =

2) Dané B vyjádřete pomocí definice. Vypište více možností, jestli je to možné.

    a. B(24) =

    b. B(13) =

    c. B(32) =

    d. B(12^2) =

Pracovní list 2

3) Doplňte chybějící člen
   a. B(39) = B(13) +

   b. B(56) = B(7) +

   c. B(36) – B(3) =

4) Vyjádřete dané B
   a. $B\left(\frac{51}{3}\right) =$

   b. $B\left(\frac{5}{3}\right) =$

   c. $B\left(\frac{1}{10}\right) =$

5) vyjádřete jedním B
   a. $B(\sqrt{2}) + B(\sqrt{2}) =$

   b. $B(\sqrt[3]{5}) + B(\sqrt[3]{5}) + B(\sqrt[3]{5}) =$

   c. $\frac{B(10)}{2} + \frac{B(10)}{2} =$

   d. $\frac{B(5)}{2} + \frac{B(5)}{3} =$

6) Vyjádřete
   a. B(1) =

   b. B(10^n) =

   c. $B(\sqrt[n]{10}) =$

Pracovní list – Procvičovací skupina

Pracovní list 1

b. Jakému logaritmu odpovídají následující součty

a) $\log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} 5 =$

b) $\log_5 9 + \log_5 7 =$

c) $\log_7 1 + \log_7 1 =$

c. Dané logaritmy vyjádřete pomocí vět o logaritmu. Vypište více možností, jestli je to možné.

a) $\log_3 24 =$

b) $\log_9 13 =$

c) $\log_2 32 =$

d) $\log_8 12^2 =$

Pracovní list 2

3. Doplňte chybějící člen
   a. $\log 39 = \log 13 +$

   b. $\log_6 56 = \log_6 7 +$

   c. $\log_{12} 36 - \log_{12} 3 =$

4. Vyjádřete daný logaritmus
   a. $\log_4 \left(\frac{51}{3}\right) =$

   b. $\log_5 \left(\frac{5}{3}\right) =$

   c. $\log \left(\frac{1}{10}\right) =$

5. Vyjádřete jedním logaritmem
   a. $\log \sqrt{2} + \log \sqrt{2} =$

   b. $\log_5 \sqrt[3]{5} + \log_5 \sqrt[3]{5} + \log_5 \sqrt[3]{5} =$

   c. $\frac{\log_7 10}{2} + \frac{\log_7 10}{2} =$

   d. $\frac{\log_{11} 5}{2} + \frac{\log_{11} 5}{3} =$

6. Vyjádřete; $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$; $n \in N$
   a. $\log_a 1 =$

   b. $\log 10^n =$

   c. $\log \sqrt[n]{10} =$

Test - logaritmy

5. Tabulka 1 určuje hodnoty logaritmů s přesností na 2 desetinná místa

Tabulka 2

x	log x	x	log x
1	0,00	**11**	1,04
2	0,30	**12**	1,07
3	0,47	**13**	1,11
4	0,60	**14**	1,14
5	0,70	**15**	1,17
6	0,77	**16**	1,20
7	0,84	**17**	1,23
8	0,90	**18**	1,24
9	0,94	**19**	1,27
10	1,00	**20**	1,30

a. ověřte platnost tabulky tak že spočítáte log (18) několika různými způsoby

log (18) =

b. Bez použití kalkulačky spočtěte

i. $\log(21) =$

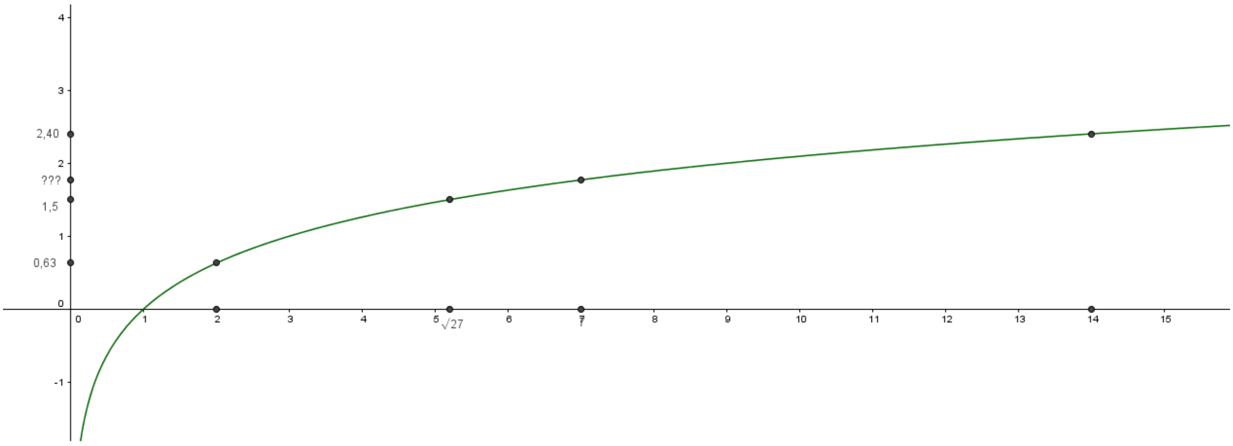
ii. $\log\left(\frac{56}{5}\right) =$

iii. $\log\left(\sqrt[2]{\frac{51}{2}}\right) =$

6. Funkce je dána předpisem $f(x) = \log_{0,85} x$
   a. určete definiční obor a načrtněte graf funkce

   b. Automobil ztrácí hodnotu každý rok 15%.
      i. určete hodnotu auta za 2 roky
      ii. Určete dobu (v letech), kdy bude cena poloviční.

7. Na obrázku je graf logaritmické funkce.



   a. Najděte funkční hodnotu $f(7)$

   b. Zjistěte základ logaritmu a napište předpis funkce

8. Jitka se v 8 hod dozvěděla, že všech 729 žáků školy půjde do kina. Během 20 min. to řekla 3 kamarádům. Každý z nich to opět za 20 min. řekl dalším třem. Tímto způsobem se zpráva šířila dál. V kolik hodin se ji dozvěděly všechny děti ve škole?

Dotazník – Historická skupina

8) Kdy jsem zjistil/a, že se jedná o logaritmy

a) hned v úvodu hodiny

b) v průběhu Pracovního listu 1

c) v průběhu Pracovního listu 2

d) nezjistil/a v průběhu samostatné práce

9) Historický výklad

a) rozšířil mé znalosti o logaritmech

b) nerozšířil mé znalosti o logaritmech

10) Napište alespoň jeden nový poznatek, který jste se v průběhu této výuky/testu dozvěděli

11) Která skupina funkcí vám přijde jako nejobtížnější

a) mocninné funkce　　　b) logaritmické funkce

b) exponenciální funkce　　　d) goniometrické funkce

12) Jaká reprezentace funkcí vám nejvíce vyhovuje

a) předpis　　　b) graf　　　c) tabulka

13) Která úloha v testu vám přišla nejzajímavější

a) úloha 1　　　c) úloha 3

b) úloha 2　　　d) úloha 4

14) Jak byste vysvětlili, co je logaritmus.

Dotazník – Procvičovací skupina

1) Napište alespoň jeden nový poznatek, který jste se v průběhu této výuky/testu dozvěděli

2) Která skupina funkcí vám přijde jako nejobtížnější
   a) mocninné funkce
   b) exponenciální funkce
   c) logaritmické funkce
   d) goniometrické funkce

3) Jaká reprezentace funkcí vám nejvíce vyhovuje
   a) předpis
   b) graf
   c) tabulka

4) Která úloha v testu vám přišla nejzajímavější
   a) úloha 1
   b) úloha 2
   c) úloha 3
   d) úloha 4

5) Jak byste vysvětlili, co je logaritmus.